Devoir surveillé n°4 - 4h

Problème I

Soit $\alpha > 1$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n} \qquad v_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\left(1+\frac{u}{n}\right)^n}\,\mathrm{d}u$$

1. Justifier l'existence de I_n pour n entier non nul.
2. Avec le changement de variables $t = \left(\frac{u}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, justifier que l'application $u \mapsto \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\left(1+\frac{u}{n}\right)^n}$ est intégrable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et exprimer I_n à l'aide de v_n.
3. Montrer $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \forall u \geqslant 0 \qquad \left(1+\frac{u}{n}\right)^n \geqslant 1+u$$
4. Pour $u \geqslant 0$, déterminer $$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{u}{n}\right)^n$$
5. Montrer $$v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \int_0^{+\infty} u^{\frac{1}{\alpha}-1}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$$
6. En déduire un équivalente simple de I_n pour $n \to +\infty$.

Problème II

Pour t réel, on note $$\mathrm{S}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{1-t^n}$$

1. Préciser l'ensemble de définition D de S.
2. Montrer $$\forall t \in \mathrm{D} \qquad \mathrm{S}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)\,t^n$$

   où $d(n)$ désigne le nombre de diviseurs de n dans $\mathbb{N}$.

Problème III

Soit $\mathrm{I} = [\,-a\,;a\,]$ avec $a > 0$. On note $\mathcal{E} = \mathscr{C}^\infty(\mathrm{I}, \mathbb{C})$ puis

- $\mathcal{D}$ la partie de $\mathcal{E}$ constituée des fonctions développables en séries entières sur un voisinage de zéro ;
- $\mathcal{P}$ la partie de $\mathcal{E}$ constituée des fonctions polynomiales.

On pose
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{W}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n \,\mathrm{d}t$$

et pour $f \in \mathcal{E}$

$$\forall x \in \mathrm{I} \qquad u(f)(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x \sin t)\,\mathrm{d}t$$

$$\forall x \in \mathrm{I} \qquad v(f)(x) = f(0) + x\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x \sin t)\,\mathrm{d}t$$

A. Préliminaires

1. Justifier que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{E}$.

2. Montrer que si $f \in \mathcal{E}$, les fonctions $u(f)$ et $v(f)$ sont bien définies et appartiennent à $\mathcal{E}$ et que l'on définit ainsi des endomorphismes u et v de $\mathcal{E}$.

3. Montrer que $\mathcal{P}$ est stable par u et v.

4. Établir pour n entier une relation simple entre W_{n+2} et W_n. En déduire
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{W}_n\mathrm{W}_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

5. Montrer que la suite $(\mathrm{W}_n)_n$ est strictement décroissante. Déterminer sa limite et donner un équivalent de cette suite.

B. Étude de la continuité de u et v

On considère la norme M sur $\mathcal{E}$ définie par
$$\forall f \in \mathcal{E} \qquad \mathrm{M}(f) = \operatorname*{Max}_{x\in \mathrm{I}} |f(x)|$$

6. Vérifier que M est bien définie et montrer que u est une application continue de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{E}, \mathrm{M})$ dans lui-même.

7. L'application v est-elle continue de $(\mathcal{E}, \mathrm{M})$ dans lui-même ?

8. Vérifier que l'application $\mathrm{N} : \mathcal{E} \to \mathbb{R}, f \mapsto \mathrm{M}(f) + \mathrm{M}(f')$ est une norme sur $\mathcal{E}$ et montrer que l'application v est continue de $(\mathcal{E}, \mathrm{N})$ dans $(\mathcal{E}, \mathrm{M})$. Les normes N et M sont-elles équivalentes ?

9. Soit $f \in \mathcal{E}$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que $f(0) = p(0)$ et $|f'(x) - p'(x)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in \mathrm{I}$. En déduire que $\mathcal{P}$ est dense dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{E}, \mathrm{N})$.

C. Étude de l'inversibilité de u et v

10. Déterminer les restrictions de $u \circ v$ et $v \circ u$ à $\mathcal{P}$.

11. Déterminer $(u \circ v)(f)$ pour $f \in \mathcal{E}$. L'endomorphisme v admet-il zéro comme valeur propre ?

12. Déterminer également $(v \circ u)(f)$ pour $f \in \mathcal{E}$ puis conclure.

Applications

13. Justifier que la fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note Argsh sa bijection réciproque. Justifier que $\operatorname{Argsh} \in \mathcal{E}$ et préciser Argsh' et Argsh''.

14. Pour $f \in \mathcal{E}$, déterminer une relation entre $v(f)$ et $u(f')$. Calculer $u(\operatorname{Arctan}')$ à l'aide du changement de variables $z = \tan(t)$ puis en déduire $u(\operatorname{Argsh}'')$.

15. Soit $f \in \mathcal{E}$. Montrer que f est paire (respectivement impaire) si et seulement si $u(f)$ l'est. Qu'en est-il pour v ?

D. Étude des valeurs propres de u et de v

16. Montrer que λ est une valeur propre de v si et seulement si $\dfrac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de u. Qu'en est-il des vecteurs propres correspondants ?

17. Montrer que $\mathcal{D}$ est stable par u. L'est-il par v ?

On considère une valeur propre λ de u de vecteur propre associé $f \in \mathcal{E}$.

18. Vérifier que pour n entier, le nombre $m_n = \underset{t \in \mathrm{I}}{\operatorname{Max}} \left|f^{(n)}(t)\right|$ est bien défini et établir

$$\forall x \in \mathrm{I} \qquad |\lambda| \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant \frac{2 m_n \mathrm{W}_n}{\pi}$$

En déduire que $f \in \mathcal{P}$.

19. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de u et v.

20. L'espace vectoriel $\mathcal{E}$ admet-il base de vecteurs propres de u ? de v ? L'ensemble des valeurs propres de u (respectivement de v) est-il une partie fermée de $\mathbb{C}$?