Feuille d'exercices n°57

Exercice 1 (**)

Soit E euclidien et $(a,b) \in \mathrm{E}^2$ avec a normé. On pose

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad f(x) = x + \langle x, a\rangle b$$

1. Justifier que $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour avoir $f \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$ puis $f \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ puis f diagonalisable.

Corrigé : 1. L'application f est linéaire par linéarité du produit scalaire en la première variable et bilinéarité du produit et clairement à valeurs dans E. Ainsi

$$\boxed{f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})}$$

2. Notons $n = \dim \mathrm{E}$ et soit $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ une base orthonormée de l'hyperplan $\mathrm{Vect}\,(a)^\perp$ (supplémentaire orthogonal de la droite vectorielle $\mathrm{Vect}\,(a)$). Par concaténation de bases orthonormées de sev supplémentaires orthogonaux, la famille $\mathscr{B} = (a_1, \ldots, a_{n-1}, a)$ est une base orthonormée de E. On a

$$\forall i \in [\![1\,;\, n-1]\!] \qquad f(a_i) = a_i \quad \text{et} \quad f(a) = a + b = (1 + \langle a, b\rangle) a + \sum_{i=1}^{n-1} \underbrace{\langle a + b, a_i\rangle}_{=\langle b, a_i\rangle} a_i$$

D'où
$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \langle b, a_1\rangle \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & \langle b, a_{n-1}\rangle \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 + \langle a, b\rangle \end{pmatrix}$$

Par suite
$$\boxed{f \in \mathrm{GL}(\mathrm{E}) \iff 1 + \langle a, b\rangle \neq 0}$$

Puis, on a $f \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ si et seulement si ses colonnes forment une base orthonormée de E d'où

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{O}(\mathrm{E}) &\iff \forall i \in [\![1\,;\, n-1]\!] \qquad \langle b, a_i\rangle = 0 \quad \text{et} \quad (1 + \langle a, b\rangle)^2 = 1 \\ &\iff b \in \mathrm{Vect}\,(a_1, \ldots, a_{n-1})^\perp = \mathrm{Vect}\,(a) \quad \text{et} \quad \langle a, b\rangle \in \{0, -2\} \end{aligned}$$

Ainsi
$$\boxed{f \in \mathcal{O}(\mathrm{E}) \iff b \in \{0_\mathrm{E}, -2a\}}$$

Par conséquent
$$f \in \mathcal{O}(\mathrm{E}) \iff f \in \left\{\mathrm{id}\,, s_{\mathrm{Vect}\,(a)^\perp}\right\}$$

Si $\langle a, b\rangle = 0$, alors $\mathrm{Sp}\,(f) = \{1\}$ donc f diagonalisable si et seulement si $f = \mathrm{id}$, autrement dit si et seulement si $b = 0$ puisque $x \mapsto \langle x, a\rangle$ est une forme linéaire non nulle. Si $\langle a, b\rangle \neq 0$, alors $\mathrm{Sp}\,(f) = \{1, 1 + \langle a, b\rangle\}$ et $\dim \mathrm{E}_1(f) + \dim \mathrm{E}_{1+\langle a,b\rangle}(f) \geqslant \dim \mathrm{E}$, cette inégalité étant une égalité puisque les sous-espaces propres sont en somme directe. On conclut

$$\boxed{f \text{ diagonalisable} \iff b = 0_\mathrm{E} \text{ ou } \langle a, b\rangle \neq 0}$$

Exercice 2 (**)

Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ avec n entier non nul. Montrer :

$$\left| \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} \right| \leqslant n$$

Corrigé : Travailler dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ne fonctionne pas. Considérons $\mathrm{E} = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique et posons $\mathrm{U}^\top = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$. On a $(\mathrm{AU})_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}$ pour $i \in [\![1\,;\, n]\!]$ puis

$$\langle \mathrm{AU}, \mathrm{U} \rangle = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{AU})_i \mathrm{U}_i = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} \quad \text{et} \quad \|\mathrm{AU}\| = \|\mathrm{U}\|$$

puisque A est une matrice d'isométrie de $\mathbb{R}^n$ en tant que matrice orthogonale (on peut aussi procéder au calcul naïf : $\|\mathrm{AU}\|^2 = (\mathrm{AU})^\top \mathrm{AU} = \mathrm{U}^\top (\mathrm{A}^\top \mathrm{A}) \mathrm{U} = \mathrm{U}^\top \mathrm{U} = \|\mathrm{U}\|^2$). D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\boxed{\left| \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} \right| = |\langle \mathrm{AU}, \mathrm{U} \rangle| \leqslant \|\mathrm{AU}\| \times \|\mathrm{U}\| = n}$$

Exercice 3 (***)

Soit E espace euclidien. Déterminer l'ensemble $\mathrm{Z}(\mathcal{O}(\mathrm{E}))$ des endomorphismes commutant avec toutes les isométries vectorielles de E.

Corrigé : Notons $\mathrm{Z}(\mathcal{O}(\mathrm{E}))$ l'ensemble des endomorphismes commutant avec tout élément de $\mathcal{O}(\mathrm{E})$. Soit $f \in \mathrm{Z}(\mathcal{O}(\mathrm{E}))$. Soit a vecteur non nul de E et $s_{\mathrm{Vect}\,(a)}$ la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}\,(a)$. On a $f \circ s_{\mathrm{Vect}\,(a)} = s_{\mathrm{Vect}\,(a)} \circ f$ et en particulier, en évaluant en a

$$f(a) = s_{\mathrm{Vect}\,(a)}(f(a))$$

D'où $f(a) = \lambda_a a$ avec λ_a un réel. Reste à montrer que λ_a ne dépend pas du choix de a. Soit $b \in \mathrm{E}$ tel que (a, b) libre. On a

$$\begin{aligned} f(a+b) = \lambda_{a+b}(a+b) = f(a) + f(b) = \lambda_a a + \lambda_b b &\Longrightarrow (\lambda_{a+b} - \lambda_a) a + (\lambda_{a+b} - \lambda_b) b = 0_{\mathrm{E}} \\ &\Longrightarrow \lambda_a = \lambda_b \end{aligned}$$

Pour α réel, on a $\qquad f(\alpha a) = \lambda_{\alpha a} \alpha a = \alpha f(a) = \alpha \lambda_a a \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{\alpha a} = \lambda_a$

Ainsi, pour tout $b \in \mathrm{E}$, on a $\lambda_a = \lambda_b$ autrement dit λ_a ne dépend pas de a. On en déduit que $f(x) = \lambda x$ pour tout x non nul et la relation vaut aussi pour $x = 0_{\mathrm{E}}$ puisque f est linéaire. Réciproquement, si $f \in \mathrm{Vect}\,(\mathrm{id}\,)$, alors $f \in \mathrm{Z}(\mathcal{O}(\mathrm{E}))$. On conclut

$$\boxed{\mathrm{Z}(\mathcal{O}(\mathrm{E})) = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{id}\,)}$$

Exercice 4 (***)

Calculer $\mathrm{Card}\ \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$.

Corrigé : Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$. On a

$$\forall j \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2 = 1$$

Comme les coefficients sont entiers, on en déduit

$$\forall j \in [\![1 \, ; \, n]\!] \qquad \exists ! i \in [\![1 \, ; \, n]\!] \quad | \quad a_{i,j} \in \{-1, 1\}$$

On peut donc définir $\sigma : [\![1 \, ; \, n]\!] \to [\![1 \, ; \, n]\!]$ et $\varepsilon : [\![1 \, ; \, n]\!] \to \{-1, 1\}$ telles que $\mathrm{A} = \big(\varepsilon(j)\delta_{i,\sigma(j)}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Soit $(j, \ell) \in [\![1 \, ; \, n]\!]^2$ avec $j \neq \ell$. Supposons $\sigma(j) = \sigma(\ell)$. On a

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} a_{i,\ell} = \varepsilon(j)\varepsilon(\ell) \in \{-1, 1\}$$

Mais par orthogonalité de A $\qquad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} a_{i,\ell} = 0$

ce qui contredit l'égalité précédente. On en déduit l'injectivité de σ et par conséquent σ est une permutation de $[\![1 \, ; \, n]\!]$. On a donc établi qu'il existe des applications uniques $\varepsilon \in [\![1 \, ; \, n]\!]^{\{-1,1\}}$ et $\sigma \in \mathrm{S}_n$ telles que

$$\mathrm{A} = \big(\varepsilon(j)\delta_{i,\sigma(j)}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

La réciproque est immédiate. Ainsi

$$\mathrm{Card}\ \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{M}_n(\mathbb{Z}) = \mathrm{Card}\ \big([\![1 \, ; \, n]\!]^{\{-1,1\}} \times \mathrm{S}_n\big) = \mathrm{Card}\, [\![1 \, ; \, n]\!]^{\{-1,1\}} \times \mathrm{Card}\ \mathrm{S}_n$$

On conclut $\qquad \boxed{\mathrm{Card}\ \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{M}_n(\mathbb{Z}) = 2^n n!}$

Exercice 5 (**)

Soit n entier non nul. Montrer que $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Corrigé : Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème de réduction des isométries, il existe $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{P}^\top \mathrm{MP} = \mathrm{diag}(\mathrm{I}_p, -\mathrm{I}_q, \mathrm{R}(\theta_1), \ldots, \mathrm{R}(\theta_s))$. Comme $\det(\mathrm{M}) = 1$, il s'ensuit que q est pair et on peut donc écrire $-\mathrm{I}_q = \mathrm{diag}(\mathrm{R}(\pi), \ldots, \mathrm{R}(\pi))$. Ainsi, on obtient

$$\mathrm{P}^\top \mathrm{MP} = \mathrm{diag}(\mathrm{I}_p, \mathrm{R}(\alpha_1), \ldots, \mathrm{R}(\alpha_r))$$

On pose $\qquad \forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad \varphi(t) = \mathrm{P}\,\mathrm{diag}(\mathrm{I}_p, \mathrm{R}(t\alpha_1), \ldots, \mathrm{R}(t\alpha_r))\mathrm{P}^\top$

On a φ continue, à valeurs dans $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ et reliant M à I_n. On peut donc relier tout couple de matrices de $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ par un chemin continu à valeurs dans $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ et on conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) \text{ est connexe par arcs.}}$$

Exercice 6 (**)

Déterminer l'intérieur de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Corrigé : Munissons $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de $\|\cdot\|_\infty$. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Soit $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(\mathrm{M}, r) \subset \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi, on a $\qquad \forall \varepsilon \in [\,0\,; r\,[\qquad (\mathrm{M} + \varepsilon \mathrm{I}_n)^\top (\mathrm{M} + \varepsilon \mathrm{I}_n) = \mathrm{I}_n$

d'où $\qquad \forall \varepsilon \in [\,0\,; r\,[\qquad \mathrm{M}^\top + \mathrm{M} = \varepsilon \mathrm{I}_n$

ce qui est absurde. On en déduit

$$\boxed{\text{L'intérieur de } \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \text{ est vide.}}$$

Remarque : On peut aussi observer, en munissant $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{S}(0, \sqrt{n})$ et comme une sphère est d'intérieur vide, il s'ensuit que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ également.

Exercice 7 (**)

Soit E euclidien et $u \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ vérifiant $\langle u(x), x\rangle = 0$. Décrire u.

Corrigé : Pour $(x, y) \in \mathrm{E}^2$, on a $\langle u(x+y), x+y\rangle = 0$ d'où

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle u(x), y\rangle = -\langle u(y), x\rangle$$

Pour $\mathscr{L}$ base orthonormée de E, il s'ensuit que $\mathrm{mat}_{\mathscr{L}} u$ est antisymétrique. Or, il existe $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E telle que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u$ est diagonale par blocs formée de blocs (1), (-1) et $\mathrm{R}(\theta)$ avec θ réel. D'après le caractère antisymétrique et un éventuel réordonnancement de la base $\mathscr{B}$ pour avoir des angles positifs, on conclut

$$\boxed{\text{Il existe } \mathscr{B} \text{ base orthonormée de E telle que } \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u = \mathrm{diag}(\mathrm{R}(\pi/2), \ldots, \mathrm{R}(\pi/2)).}$$