ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°55

Exercice 1 (**)

Soit E euclidien et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Établir

$$\mathrm{Im}\ u^* = (\mathrm{Ker}\ u)^{\perp} \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}\ u^* = (\mathrm{Im}\ u)^{\perp}$$

Exercice 2 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ avec n entier non nul nul et a un vecteur normé de E. Déterminer la matrice dans la base canonique de $s_{\mathrm{Vect}\,(a)^{\perp}}$.

Exercice 3 (*)

Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ avec n entier non nul. Montrer :

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}$$

Exercice 4 (*)

Soit E euclidien. Soient F et G des sev orthogonaux de E. Montrer que

$$s_{\mathrm{F}} \circ s_{\mathrm{G}} = s_{\mathrm{G}} \circ s_{\mathrm{F}} = s_{(\mathrm{F} \oplus \mathrm{G})^{\perp}}$$

Exercice 5 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec n entier non nul nul muni du produit scalaire canonique. On pose

$$\forall \mathrm{M} \in \mathrm{E} \qquad \varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{M} - \frac{2}{n}\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})\mathrm{I}_n$$

1. Montrer que $\varphi \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$. Calculer φ^2 puis décrire φ.
2. Soit $\psi \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$. Décrire $\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}$.

Exercice 6 (**)

Dans E euclidien, soit $u \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ et $v = \mathrm{id} - u$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}\ v = (\mathrm{Im}\ v)^{\perp}$.
2. Montrer que pour $x \in \mathrm{E}$, $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} \|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k(x) - p_{\mathrm{Ker}\ v}(x)\| = 0$

Exercice 7 (**)

Soit a vecteur unitaire d'un espace euclidien E, α un réel et f_α définie par

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad f_\alpha(x) = x + \alpha\langle x, a\rangle a$$

1. Justifier que $f_\alpha \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
2. Montrer que $f_\alpha \in \mathrm{GL}(\mathrm{E}) \iff \alpha \neq -1$. Décrire f_{-1}.
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α pour avoir $f_\alpha \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$. Quand la condition est réalisée, décrire f_α.

Exercice 8 (**)

Soit E euclidien et F, G des sev de E.

1. Déterminer $(\mathrm{F}+\mathrm{G})^\perp$.
2. En déduire $(\mathrm{F}\cap\mathrm{G})^\perp$.
3. On suppose $\mathrm{F}^\perp \perp \mathrm{G}^\perp$. Montrer

$$p_\mathrm{F} + p_\mathrm{G} - p_{\mathrm{F}\cap\mathrm{G}} = \mathrm{id} \quad \text{ et } \quad p_\mathrm{F}\circ p_\mathrm{G} = p_\mathrm{G}\circ p_\mathrm{F} = p_{\mathrm{F}\cap\mathrm{G}}$$

Exercice 9 (**)

Soit E euclidien de dimension n entier non nul, $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E et $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{E}^n$. Montrer

$$|\det_\mathscr{B}(x_1, \ldots, x_n)| \leqslant \prod_{k=1}^{n} \|x_k\|$$

Exercice 10 (**)

Soit E euclidien de dimension n entier non nul et $(u_1, \ldots, u_n) \in \mathrm{E}^n$. On pose

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad f(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i\rangle u_i$$

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
2. Si $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base orthonormée de E, déterminer f.
3. On suppose $f \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$.
   (a) Montrer que $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E.
   (b) Pour $i \in [\![1 ; n]\!]$, calculer $\langle f(u_i), u_i\rangle$ et en déduire que $\|u_i\| \in \,]\,0 ; 1\,]$.
   (c) Pour $i \in [\![1 ; n]\!]$, en considérant $x \in \mathrm{Vect}\left((u_k)_{k\in[\![1 ; n]\!]\smallsetminus\{i\}}\right)^\perp \smallsetminus \{0_\mathrm{E}\}$, montrer que $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base orthonormée.

Exercice 11 (**)

Soit E euclidien et G un sous-groupe fini de GL(E).

1. Soit $f \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$. Montrer que tout sev stable par f admet un supplémentaire stable.
2. Montrer que $(x, y) \mapsto \sum_{g\in\mathrm{G}} \langle g(x), g(y)\rangle$ définit un produit scalaire sur E.
3. Soit F sev stable par tous les éléments de G. Montrer que F admet un supplémentaire stable par tous les éléments de G.