

Feuille d'exercices n°56

Exercice 1 (**)

Soit E euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer $\text{Ker } f = \text{Im } f \implies f + f^* \in \text{GL}(E)$
2. Montrer la réciproque si $f^2 = 0$.

Exercice 2 (***)

Soit E euclidien et a, b vecteurs non nuls de E . Déterminer les bornes inférieures et supérieures de φ sur $E \setminus \{0_E\}$ avec

$$\forall x \in E \setminus \{0_E\} \quad \varphi(x) = \frac{\langle a, x \rangle \langle b, x \rangle}{\|x\|^2}$$

Exercice 3 (***)

Soit E euclidien de dimension n entier non nul. Pour une famille $u = (u_1, \dots, u_p) \in E^p$, on note $G_u = (\langle u_i, u_j \rangle)_{(i,j) \in \llbracket 1 ; p \rrbracket^2} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Soient $u = (u_1, \dots, u_p) \in E^p$ et $v = (v_1, \dots, v_p) \in E^p$ telles que $G_u = G_v$. On pourra utiliser librement les résultats déjà rencontrés sur les matrices de Gram.

1. On suppose u libre. Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{O}(E)$ tel que $f(u_i) = v_i$ pour $i \in \llbracket 1 ; p \rrbracket$.
2. Généraliser le résultat précédent pour u quelconque.

Exercice 4 (***)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $\forall M \in E \quad \varphi(M) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} m_{i,j}$

Justifier que φ atteint ses bornes sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ et les préciser.

Exercice 5 (***)

Soient E euclidien et $f : E \rightarrow E$ vérifiant

$$f(0_E) = 0_E \quad \text{et} \quad \forall (x, y) \in E^2 \quad \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$$

Montrer que $f \in \mathcal{O}(E)$.

Exercice 6 (***)

Soit E euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ conservant l'orthogonalité, *i.e.*

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \langle x, y \rangle = 0 \implies \langle f(x), f(y) \rangle = 0$$

1. Pour u et v dans E unitaires, calculer $\langle u + v, u - v \rangle$.
2. Montrer qu'il existe $\alpha \geq 0$ tel que

$$\forall x \in E \quad \|f(x)\| = \alpha \|x\|$$

3. Conclure qu'il existe $g \in \mathcal{O}(E)$ tel que $f = \alpha g$.

Exercice 7 (***)

1. Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer $I_n + A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$

puis $B = (I_n - A)(I_n + A)^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $-1 \notin \text{Sp}(B)$

2. On définit φ sur $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ par

$$\forall A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \quad \varphi(A) = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$$

Montrer que φ réalise une bijection de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sur $\{B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \mid -1 \notin \text{Sp}(B)\}$.

Exercice 8 (***)

Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ avec n entier non nul et vérifiant $A^2 = A^\top$.

1. Montrer que $A^3 = I_n$ et $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $\dim \text{Ker}(A^2 + A + I_n)$ est paire.

3. Réduire orthogonalement A .