ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°57

Exercice 1 (**)

Soit E euclidien et $(a, b) \in \mathrm{E}^2$ avec a normé. On pose

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad f(x) = x + \langle x, a\rangle b$$

1. Justifier que $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour avoir $f \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$ puis $f \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ puis f diagonalisable.

Indications : 2. Considérer une base adaptée à la décomposition $\mathrm{E} = \mathrm{Vect}\,(a)^{\perp} \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Vect}\,(a)$ et écrire la matrice de f dans cette base.

Exercice 2 (**)

Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ avec n entier non nul. Montrer :

$$\left| \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} \right| \leqslant n$$

Indications : Considérer $\mathrm{E} = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique puis calculer $\langle \mathrm{AU}, \mathrm{U}\rangle$ avec $\mathrm{U}^{\top} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 (***)

Soit E espace euclidien. Déterminer l'ensemble $\mathrm{Z}(\mathcal{O}(\mathrm{E}))$ des endomorphismes commutant avec toutes les isométries vectorielles de E.

Indications : Soit $f \in \mathrm{Z}(\mathcal{O}(\mathrm{E}))$ et $a \in \mathrm{E} \setminus \{0_{\mathrm{E}}\}$. Considérer f et $s_{\mathrm{Vect}\,(a)}$ et en déduire que $(f(a), a)$ est liée.

Exercice 4 (***)

Calculer Card $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$.

Indications : Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$. Observer que pour une colonne, un et un seul coefficient est non nul. Utiliser ensuite l'orthogonalité des colonnes pour déterminer la forme de A.

Exercice 5 (**)

Soit n entier non nul. Montrer que $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Indications : Utiliser le théorème de réduction des isométries. Pour la fabrication d'un chemin continu à valeurs dans $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$, observer que $t \mapsto \mathrm{R}(t\theta)$ permet de relier continument I_2 à $\mathrm{R}(\theta)$ dans $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 6 (**)

Déterminer l'intérieur de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Indications : Pour $\mathrm{M} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})^\circ$, considérer $\mathrm{M} + \varepsilon \mathrm{I}_n$ avec $\varepsilon \in [\,0\,;r\,[$ et $r > 0$ bien choisi.

Exercice 7 (**)

Soit E euclidien et $u \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ vérifiant $\langle u(x), x \rangle = 0$. Décrire u.

Indications : Montrer que $\langle u(x), y \rangle = -\langle u(y), x \rangle$ pour $(x, y) \in \mathrm{E}^2$. En déduire une forme particulière pour $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u$ avec $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E. Conclure avec le théorème de réduction des isométries.