ESPACES EUCLIDIENS

B. Landelle

Table des matières

Rappels

On appelle espace euclidien un espace préhilbertien réel de dimension finie. Dans E espace euclidien, pour tout sev F de E, on a

$$\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^{\perp} \quad \text{et} \quad (\mathrm{F}^{\perp})^{\perp} = \mathrm{F}$$

Il existe une base orthonormée de E. On suppose E non nul. Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base orthonormée de E. Pour $x \in \mathrm{E}$, on a $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i$. Pour $(x, y) \in \mathrm{E}^2$, notant $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i$ et $\mathrm{X} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} x$, $\mathrm{Y} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} y$, on a

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i = \mathrm{X}^{\top}\mathrm{Y} = \langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}\rangle \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \mathrm{X}^{\top}\mathrm{X} = \|\mathrm{X}\|^2$$

Pour $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et $\mathrm{A} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u = \big(a_{i,j}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on a

$$\forall (i, j) \in [\![1 \,;\, n]\!]^2 \qquad a_{i,j} = \langle e_i, u(e_j)\rangle \quad \text{et} \quad \langle x, u(y)\rangle = \mathrm{X}^{\top}\mathrm{A}\mathrm{Y} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i y_j a_{i,j}$$

Dans tout ce qui suit, l'ensemble E désigne un espace euclidien non nul. Les espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sont munis de leurs structures euclidiennes canoniques et on confond vecteur de $\mathbb{R}^n$ et matrice colonne de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

I Adjoint d'un endomorphisme

1 Définition

Théorème 1 (Théorème de représentation de Riesz).

$$\forall \varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{R}) \qquad \exists ! a \in \mathrm{E} \quad | \quad \forall x \in \mathrm{E} \qquad \varphi(x) = \langle a, x\rangle$$

Démonstration. L'application $\Phi : \mathrm{E} \to \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{R}),\ a \mapsto (x \mapsto \langle a, x\rangle)$ est linéaire injective entre deux espaces de même dimension donc est un isomorphisme. □

Remarque : L'espace $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{R})$ des formes linéaires de E est appelé *dual* de E et habituellement noté E^*.

Théorème 2. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Il existe un unique endomorphisme $u^* \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ vérifiant*

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$$

Démonstration. Soit $y \in \mathrm{E}$. D'après le théorème de Riesz appliqué à la forme linéaire $x \mapsto \langle u(x), y\rangle$, on dispose d'un unique $u^*(y) \in \mathrm{E}$ tel que

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$$

ce qui prouve l'existence d'une unique application $u^* : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ vérifiant la relation attendue. Soient y, z dans E et λ réel. On a pour $x \in \mathrm{E}$

$$\langle u(x), y + \lambda z\rangle = \langle x, u^*(y + \lambda z)\rangle$$

puis

$$\langle u(x), y + \lambda z\rangle = \langle u(x), y\rangle + \lambda \langle u(x), z\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle + \lambda \langle x, u^*(z)\rangle = \langle x, u^*(y) + \lambda u^*(z)\rangle$$

Par unicité de cette écriture, on en déduit la linéarité de u^*. □

Définition 1. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. L'endomorphisme u^* est appelé* endomorphisme adjoint *de u.*

Remarques : (1) Il est immédiat que $\mathrm{id}^* = \mathrm{id}$.
(2) Par symétrie du produit scalaire, on a évidemment

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle u^*(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$$

Vocabulaire : L'application $\mathscr{L}(\mathrm{E}) \to \mathscr{L}(\mathrm{E}), u \mapsto u^*$ est appelée *adjonction.*

2 Propriétés

Proposition 1. *Soient u, v dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ et λ réel. On a*

1. $(u+\lambda v)^* = u^* + \lambda v^*$;
2. $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$;
3. $(u^*)^* = u$;
4. $u \in \mathrm{GL}(\mathrm{E}) \iff u^* \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$ *et dans ce cas* $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$.

Démonstration. 1. Soit $(x,y) \in \mathrm{E}^2$. On a

$$\langle (u+\lambda v)(x), y\rangle = \langle u(x), y\rangle + \lambda \langle v(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle + \lambda \langle x, v^*(y)\rangle = \langle x, (u^*+\lambda v^*)(y)\rangle$$

d'où le résultat par unicité de l'adjoint.
2. Soit $(x,y) \in \mathrm{E}^2$. On a

$$\langle (u\circ v)(x), y\rangle = \langle u(v(x)), y\rangle = \langle v(x), u^*(y)\rangle = \langle x, v^*(u^*(y))\rangle = \langle x, (v^* \circ u^*)(y)\rangle$$

d'où le résultat par unicité de l'adjoint.
3. Soit $(x,y) \in \mathrm{E}^2$. On a

$$\langle u^*(x), y\rangle = \langle x, (u^*)^*(y)\rangle \quad \text{et} \quad \langle u^*(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$$

d'où le résultat par unicité de l'adjoint.
4. Supposons u inversible. On a $(u \circ u^{-1})^* = \mathrm{id}^* = \mathrm{id} = (u^{-1})^* \circ u^*$ d'où l'existence d'un inverse à gauche de u^* ce qui prouve son inversibilité et l'inverse à gauche est son inverse. Le sens indirect s'obtient en appliquant le sens direct à u^*. $\square$

Remarque : On a prouvé en particulier que l'adjonction est une involution linéaire de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$, autrement dit une symétrie de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.

Proposition 2. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et $\mathscr{B}$ base orthonormée de E. On a*

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u^* = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u^\top$$

Démonstration. On note $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Soit $(i,j) \in [\![1 \,; n]\!]^2$. On a

$$\langle u^*(e_j), e_i\rangle = \langle e_j, u(e_i)\rangle$$

et le résultat suit. $\square$

Proposition 3. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, on a $\det(u^*) = \det(u)$.*

Démonstration. Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E, il vient

$$\det(u^*) = \det(\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u^*) = \det\left(\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u^\top\right) = \det(\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u) = \det(u)$$

$\square$

Proposition 4. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et F sev de E stable par u. Alors, le sev $\mathrm{F}^\perp$ est stable par u^*.*

Démonstration. Soit $(x,y) \in \mathrm{F}^\perp \times \mathrm{F}$. On a

$$\langle u^*(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle = 0$$

d'où $u^*(\mathrm{F}^\perp) \perp \mathrm{F}$ ce qui prouve le résultat attendu. $\square$

II Isométries vectorielles

1 Définition, propriétés

Définition 2. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On dit que l'endomorphisme u est une* isométrie vectorielle *s'il conserve la norme, i.e.*

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \|u(x)\| = \|x\|$$

Notations : On note $\mathcal{O}(\mathrm{E})$ l'ensemble des isométries vectorielles de E.

Exemples : 1. Dans E euclidien, id et $-\mathrm{id}$ sont des isométries.
2. Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$ et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ avec $u(x, y) = (y, -x)$ pour tout $(x, y) \in \mathrm{E}$.

Proposition 5. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On a*

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle \iff u \textit{ est une isométrie}$$

Vocabulaire : On dit que u conserve le produit scalaire ou que u est un *endomorphisme orthogonal*.

Démonstration. Le sens direct est immédiat. Réciproquement, on utilise l'identité de polarisation. Pour $(x, y) \in \mathrm{E}^2$, on a

$$\begin{aligned} \langle u(x), u(y)\rangle &= \frac{1}{2}\left[\|u(x) + u(y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right] = \langle x, y\rangle \end{aligned}$$

□

Proposition 6. *On a l'inclusion* $\qquad \mathcal{O}(\mathrm{E}) \subset \mathrm{GL}(\mathrm{E})$

Démonstration. On a $\qquad u(x) = 0_{\mathrm{E}} \Longrightarrow \|u(x)\| = 0 \Longrightarrow \|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0_{\mathrm{E}}$

Ainsi, u est un endomorphisme injectif sur E espace de dimension finie donc $u \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$. □

Vocabulaire : Les isométries vectorielles sont aussi appelées *automorphismes orthogonaux* puisque ce sont des automorphismes qui conservent le produit scalaire (et donc l'orthogonalité).

Théorème 3. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E. On a*

$$u \in \mathcal{O}(\mathrm{E}) \iff u(\mathscr{B}) \textit{ base orthonormée de } \mathrm{E}$$

Démonstration. Notons $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Supposons $u \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$. Pour $(i, j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2$, on a

$$\langle u(e_i), u(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}$$

d'où $u(\mathscr{B})$ base orthonormée. Supposons $u(\mathscr{B})$ une base orthonormée de E. Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$. On a

$$\langle u(x), u(y)\rangle = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i y_j \underbrace{\langle u(e_i), u(e_j)\rangle}_{\delta_{i,j}} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \langle x, y\rangle$$

□

Théorème 4. *Soit* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$*. On a*

$$u \in \mathcal{O}(\mathrm{E}) \iff u \in \mathrm{GL}(\mathrm{E}) \quad \text{et} \quad u^* = u^{-1}$$

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$. On a u automorphisme puis pour $(x, y) \in \mathrm{E}^2$

$$\langle u(x), y \rangle = \langle u(x), u(u^{-1}(y)) \rangle = \langle x, u^{-1}(y) \rangle$$

d'où le résultat par unicité de l'adjoint. Supposons u inversible et $u^* = u^{-1}$. Pour $x \in \mathrm{E}$, il vient

$$\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x) \rangle = \langle x, u^*(u(x)) \rangle = \|x\|^2$$

et le résultat suit. □

Proposition 7. *Soit* $u \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$*. Alors, les seules valeurs propres possibles sont* 1 *et* -1*, c'est-à-dire*

$$\mathrm{Sp}\,(u) \subset \{-1, 1\}$$

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)$ et $x \in \mathrm{E}_\lambda(u) \setminus \{0_\mathrm{E}\}$. Alors

$$\|u(x)\| = \|x\| \quad \text{et} \quad \|u(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\| \Longrightarrow \|x\| = |\lambda|\,\|x\|$$

Comme x est non nul, on a $\|x\| \neq 0$ et par suite $|\lambda| = 1$ *i.e.* $\lambda \in \{-1, 1\}$. □

Remarque : Pour u isométrie et $\mathscr{B}$ base orthonormée de E, on peut avoir $\mathrm{Sp}_\mathbb{C}(\mathrm{mat}_\mathscr{B} u)$ non inclus dans $\mathbb{R}$. Par exemple, si l'application u est canoniquement associé à $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, l'application u est une isométrie avec $\mathrm{Sp}\,(u) = \mathrm{Sp}_\mathbb{R}(\mathrm{A}) = \varnothing$ tandis que $\mathrm{Sp}_\mathbb{C}(\mathrm{A}) = \{\pm\,\mathrm{i}\}$.

2 Groupe orthogonal

Proposition 8. *L'ensemble* $\mathcal{O}(\mathrm{E})$ *est un sous-groupe de* $(\mathrm{GL}(\mathrm{E}), \circ)$*.*

Démonstration. On a $\mathrm{id} \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$. Soit $u \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$. Alors u est bijectif donc admet un inverse pour la composition qui est sa réciproque. Puis, pour tout $x \in \mathrm{E}$, on a $\|x\| = \|u \circ u^{-1}(x)\| = \|u^{-1}(x)\|$ autrement dit u^{-1} est une isométrie. Enfin, pour tout $(u, v) \in \mathcal{O}(\mathrm{E})^2$, on a

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \|u \circ v(x)\| = \|u(v(x))\| = \|v(x)\| = \|x\|$$

d'où $u \circ v \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$. Ainsi, $\mathcal{O}(\mathrm{E})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(\mathrm{E})$. □

Définition 3. *L'ensemble* $\mathcal{O}(\mathrm{E})$ *des isométries vectorielles de* E *est appelé* groupe orthogonal *de* E*.*

Proposition 9. *Soit* $u \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$*. On a* $\det(u) \in \{\pm\,1\}$*.*

Démonstration. On a $u^* \circ u = \mathrm{id}$ d'où $\det(u^* \circ u) = 1$ et $\det(u^* \circ u) = \det\,(u)^2$. Le résultat suit. □

Définition 4. *Soit* $u \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$*. On dit que* u *est une* isométrie vectorielle directe *ou* positive *si* $\det(u) = 1$ *et* indirecte *ou* négative *si* $\det(u) = -1$*.*

Proposition 10. *L'ensemble* $\mathcal{SO}(\mathrm{E}) = \{u \in \mathcal{O}(\mathrm{E}) \mid \det(u) = 1\}$ *est un sous-groupe de* $(\mathcal{O}(\mathrm{E}), \circ)$*.*

Démonstration. Soit $\varphi : \mathcal{O}(\mathrm{E}) \to \{-1, 1\}$, $u \mapsto \det(u)$. Les couples $(\mathcal{O}(\mathrm{E}), \circ)$ et $(\{-1, 1\}, \times)$ sont des groupes et l'application φ est un morphisme de groupes. Alors, on a $\mathcal{SO}(\mathrm{E}) = \mathrm{Ker}\,\varphi$ sous-groupe de $(\mathcal{O}(\mathrm{E}), \circ)$ comme noyau d'un morphisme de groupes. □

Définition 5. *L'ensemble* $\mathcal{SO}(\mathrm{E})$ *est appelé* groupe spécial orthogonal *de* E*.*

Notations : On note $\mathcal{O}^-(\mathrm{E})$ l'ensemble des isométries vectorielles indirectes de E.

3 Symétries orthogonales

Définition 6. *Soit* F *sev de* E. *On appelle* symétrie orthogonale par rapport à F *notée* s_{F} *la symétrie par rapport à* F *parallèlement à* $\mathrm{F}^{\perp}$.

Définition 7. *Une symétrie* $s \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ *est dite* orthogonale *si* $\operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}) \perp \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id})$.

Remarque : Une symétrie orthogonale s est la symétrie orthogonale $s_{\operatorname{Ker}(s-\mathrm{id})}$ au sens de la définition 6.

Proposition 11. *Soit* F *sev de* E. *La symétrie* s_{F} *est la symétrie orthogonale associée à la projection orthogonale* p_{F} *avec* $s_{\mathrm{F}} = 2p_{\mathrm{F}} - \mathrm{id}$.

Démonstration. On a
$$\operatorname{Ker}(s_{\mathrm{F}} - \mathrm{id}) = \operatorname{Im} p_{\mathrm{F}} = \mathrm{F} \perp \mathrm{F}^{\perp} = \operatorname{Ker}(s_{\mathrm{F}} + \mathrm{id}) = \operatorname{Ker} p_{\mathrm{F}}$$
d'où le résultat. □

Proposition 12. *Soit* s *une symétrie de* E. *On a*
$$s \text{ symétrie orthogonale} \iff s \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$$

Démonstration. Supposons s symétrie orthogonale. On a
$$\mathrm{E} = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}) \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id})$$
Soit $x \in \mathrm{E}$. On dispose d'un unique couple $(a, b) \in \operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}) \times \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id})$ tel que $x = a + b$. On a $s(x) = a - b$ puis, avec le théorème de Pythagore,
$$\|s(x)\|^2 = \|a - b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 = \|x\|^2$$
Ainsi, l'application s est une isométrie. Réciproquement, on suppose que l'application s est une symétrie et une isométrie. Alors elle conserve le produit scalaire et il vient
$$\forall (a, b) \in \operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}) \times \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}) \qquad \langle a, b\rangle = -\langle s(a), s(b)\rangle = -\langle a, b\rangle = 0$$
d'où le caractère orthogonal de s en tant que symétrie.

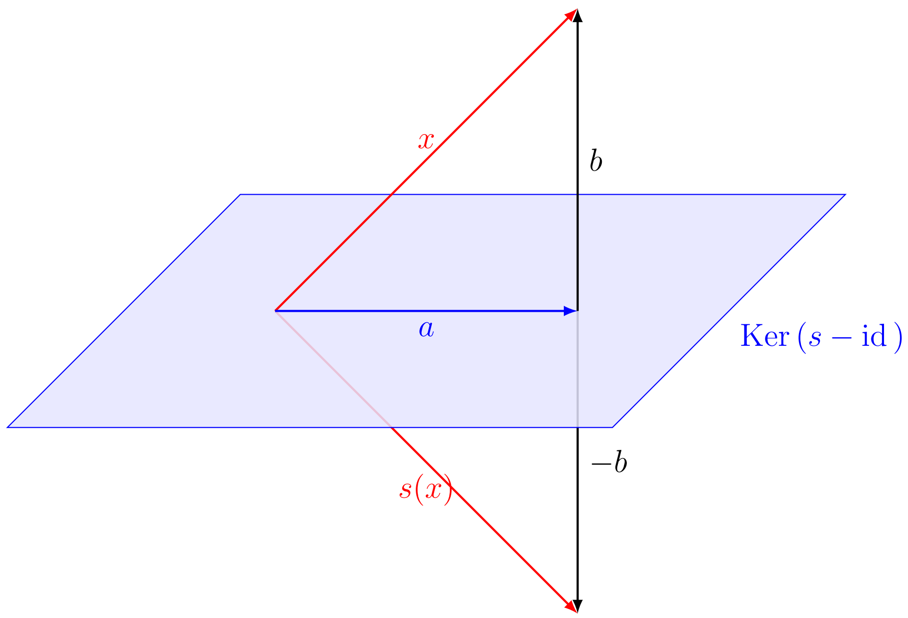

Figure 1 – Symétrie orthogonale

□

Définition 8. *Soit s une symétrie orthogonale. Si* $\dim \mathrm{Ker}\,(s+\mathrm{id}\,)=1$, *la symétrie s est appelée* réflexion orthogonale *par rapport à* $\mathrm{Ker}\,(s-\mathrm{id}\,)$.

Remarque : L'espace des invariants $\mathrm{Ker}\,(s-\mathrm{id}\,)$ est un hyperplan de E à l'image du reflet dans un miroir (on peut voir s comme l'application « reflet dans le miroir »).

Proposition 13 (À refaire). *Soit a un vecteur normé de* E. *On a*

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad s_{\mathrm{Vect}\,(a)^\perp}(x) = x - 2\langle x, a\rangle a$$

Démonstration. Notons simplement $s = s_{\mathrm{Vect}\,(a)^\perp}$. On a $\mathrm{E} = \mathrm{Vect}\,(a)^\perp \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Vect}\,(a)$. Ainsi pour $x \in \mathrm{E}$,

$$\exists!(u,v) \in \mathrm{Vect}\,(a)^\perp \times \mathrm{Vect}\,(a) \quad | \quad x = u+v$$

et $s(x) = u - v$. Or comme (a) est une base orthonormée de $\mathrm{Vect}\,(a)$, il s'ensuit que $v = \langle x, a\rangle a$ et $u = x - \langle x, a\rangle a$. Le résultat suit.

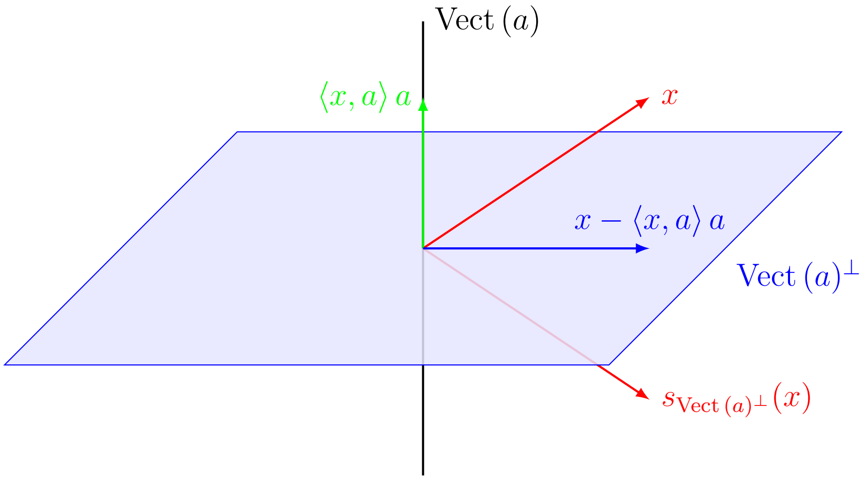

FIGURE 2 – Réflexion orthogonale

□

III Matrices orthogonales

1 Définitions, propriétés

Définition 9. *Une matrice* $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *est dite* orthogonale *si elle vérifie* $\mathrm{A}^\top \mathrm{A} = \mathrm{I}_n$.

Notations : On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{O}(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 14. *Soit* $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. *On a*

$$\mathrm{A} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \iff \mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \ \textit{et}\ \mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}^\top$$

Démonstration. Propriété du groupe $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$. □

Remarque : D'après les propriétés de structure de groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\mathrm{A}^\top \mathrm{A} = \mathrm{I}_n \iff \mathrm{A}\mathrm{A}^\top = \mathrm{I}_n \iff \mathrm{A}^\top \mathrm{A} = \mathrm{A}\mathrm{A}^\top = \mathrm{I}_n$$

Théorème 5. *Soit* $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $\mathrm{A} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$;
2. *Les vecteurs colonnes de* A *forment une base orthonormée de* $\mathbb{R}^n$;
3. *Les vecteurs lignes de* A *forment une base orthonormée de* $\mathbb{R}^n$;

Démonstration. Notons $(\mathrm{C}_1, \ldots, \mathrm{C}_n)$ les colonnes de $\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. On a

$$\forall (i,j) \in [\![1 \,;\, n]\!]^2 \qquad \left(\mathrm{A}^\top \mathrm{A}\right)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} a_{k,j} = \langle \mathrm{C}_i, \mathrm{C}_j \rangle$$

On en déduit l'équivalence (1) $\iff$ (2). L'équivalence (1) $\iff$ (3) s'en déduit par transposition car $\mathrm{A} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \iff \mathrm{A}^\top \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. □

Remarque : On peut généraliser le sens du calcul auxiliaire vu précédemment. Pour $\mathrm{A} = (\mathrm{A}_1|\ldots|\mathrm{A}_n)$ et $\mathrm{B} = (\mathrm{B}_1|\ldots|\mathrm{B}_n)$ matrices de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{A}^\top \mathrm{B} = \left(\langle \mathrm{A}_i, \mathrm{B}_j \rangle_{\mathbb{R}^p}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Proposition 15. *Soient* $\mathscr{B}_1$ *une base orthonormée de* E *et* $\mathscr{B}_2$ *une famille de* n *vecteurs de* E. *On a*

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1} \mathscr{B}_2 \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \iff \mathscr{B}_2 \textit{ base orthonormée de } \mathrm{E}$$

Démonstration. Notons $\mathscr{B}_2 = (\varepsilon_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ et $\mathrm{P} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1} \mathscr{B}_2 = \left(p_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. On a

$$\forall (i,j) \in [\![1 \,;\, n]\!]^2 \qquad \left(\mathrm{P}^\top \mathrm{P}\right)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} p_{k,i} p_{k,j} = \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle$$

d'où

$$\mathrm{P}^\top \mathrm{P} = \mathrm{I}_n \iff \forall (i,j) \in [\![1 \,;\, n]\!]^2 \qquad \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = \delta_{i,j}$$

□

2 Groupe orthogonal

Proposition 16. *L'ensemble* $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ *est un sous-groupe de* $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$.

Démonstration. On a $\mathrm{I}_n \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Soient A, B dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Alors, on a

$$(\mathrm{AB})^\top \mathrm{AB} = \mathrm{I}_n \quad \text{et} \quad (\mathrm{A}^{-1})^\top \mathrm{A}^{-1} = \mathrm{AA}^\top = \mathrm{I}_n$$

□

Définition 10. *Le groupe* $(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times)$ *est appelé* groupe orthogonal d'ordre n *sur* $\mathbb{R}$.

Proposition 17. *Soit* $\mathrm{A} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. *On a* $\det(\mathrm{A}) \in \{\pm 1\}$.

Démonstration. On a

$$\det(\mathrm{A}^\top \mathrm{A}) = \det(\mathrm{A})^2 = \det(\mathrm{I}_n) = 1$$

Le résultat suit. □

Avertissement : ce résultat ne caractérise nullement les matrices orthogonales. Pour $n \geqslant 2$, la matrice $\mathrm{I}_n + \mathrm{E}_{1,n}$ a un déterminant égal à 1 mais n'est pas orthogonale puisque sa dernière colonne n'est pas normée.

Définition 11. *Soit* $\mathrm{A} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. *La matrice* A *est dit* orthogonale positive *ou* directe *si* $\det(\mathrm{A}) = 1$ *et* négative *ou* indirecte *si* $\det(\mathrm{A}) = -1$.

Proposition 18. *L'ensemble* $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ *(noté aussi* $\mathcal{SO}(n)$*) défini par* $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) = \{\mathrm{M} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \mid \det(\mathrm{M}) = 1\}$ *est un sous-groupe de* $(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times)$.

Démonstration. Soit $\varphi : \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \to \{-1, 1\}\,,\ \mathrm{M} \mapsto \det(\mathrm{M})$. Les couples $(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times)$ et $(\{-1, 1\}\,, \times)$ sont des groupes et l'application φ est un morphisme de groupes. Alors, on a $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} \varphi$ sous-groupe de $(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times)$ comme noyau d'un morphisme de groupes. □

Définition 12. *Le groupe* $(\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}), \times)$ *est appelé* groupe spécial orthogonal d'ordre n *sur* $\mathbb{R}$.

Notations : On note $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{O}^-(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales négatives.

3 Isométries vectorielles et matrices orthogonales

Théorème 6. *Soit* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ *et* $\mathscr{B}$ *une base orthonormée de* E. *On a*

$$u \in \mathcal{O}(\mathrm{E}) \iff \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$$

Démonstration. On a, avec la proposition 15 et le théorème 3

$$\begin{aligned}\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) &\iff \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u(\mathscr{B}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \\ &\iff u(\mathscr{B}) \text{ base orthonormée de E} \iff u \in \mathcal{O}(\mathrm{E})\end{aligned}$$

□

Corollaire 1. *Soit* $\mathrm{A} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. *L'endomorphisme* $u_{\mathrm{A}} \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ *canoniquement associé à* A *appartient à* $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. La base canonique $\mathscr{C}$ est une base orthonormée de $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ (pour le produit scalaire canonique). Ainsi, l'endomorphisme $u_{\mathrm{A}} \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ canoniquement associé est tel que $\mathrm{mat}_{\mathscr{C}} u_{\mathrm{A}} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ d'où $u_{\mathrm{A}} \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ d'après le théorème 6. □

Corollaire 2. *Soit* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ *et* $\mathscr{B}$ *base orthonormée de* E. *On a*

$$u \in \mathcal{SO}(\mathrm{E}) \iff \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$$

Démonstration. Immédiate car $\det(u) = \det(\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u)$ avec $\mathscr{B}$ base de E. □

Remarque : On peut annoncer le même résultat en remplaçant $\mathcal{SO}(\mathrm{E})$ et $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ par $\mathcal{O}^-(\mathrm{E})$ et $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$.

IV Réduction des isométries

1 Orientation d'un espace vectoriel

Définition 13. *Soit* $\mathscr{B}_0$ *une base de* E. *On dit qu'une base* $\mathscr{B}$ *de* E *donne la* même orientation *à* E *que* $\mathscr{B}_0$ *si* $\det_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}) > 0$ *et donne une* orientation opposée *à celle de* $\mathscr{B}_0$ *si* $\det_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}) < 0$.

Définition 14. *L'espace* E *est dit* orienté *si on fixe une base* $\mathscr{B}_0$ *pour le choix de l'orientation de toute base. Une base ayant même orientation que* $\mathscr{B}_0$ *est dite* directe *et* indirecte *dans le cas contraire.*

Exemple : Par convention, on oriente $\mathbb{R}^2$ avec la base $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ et on oriente $\mathbb{R}^3$ avec la base $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$.

FIGURE 3 – Orientation des espaces $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Proposition 19. *Soit* E *espace euclidien orienté et* $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$ *deux bases directes de* E. *Alors on a* $\det_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_2) > 0$.

Démonstration. Soit $\mathscr{B}_0$ la base de E déterminant l'orientation de toute base. On a

$$\det_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_2) = \det_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_0)\det_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}_2) = \det_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}_1)^{-1}\det_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}_2) > 0$$

□

Proposition 20. *Soit* E *espace euclidien orienté et* $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$ *deux bases orthonormées directes de* E. *On a* $\det_{\mathscr{B}_1} = \det_{\mathscr{B}_2}$.

Démonstration. Soit $\mathscr{L}$ une famille de n vecteurs de E. On a

$$\det_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{L}) = \det_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_2)\det_{\mathscr{B}_2}(\mathscr{L})$$

et la matrice $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1}\mathscr{B}_2$ est orthogonale comme matrice de passage entre deux bases orthonormées et positive car les bases sont directes. □

2 Le groupe $(\mathcal{O}_2(\mathbb{R}), \times)$

Théorème 7. *Soit* $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. *On a* $\mathrm{A} \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ *si et seulement s'il existe* $\theta \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Démonstration. On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec a, b, c, d réels et on écrit

$$\mathrm{A}^\top\mathrm{A} = \mathrm{I}_2 \iff \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \end{cases} \iff \exists(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2 \ : \ \begin{cases} a + \mathrm{i}c = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \\ d + \mathrm{i}b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} \\ \sin(\theta + \theta') = 0 \end{cases}$$

et comme $\sin(\theta + \theta') = 0$ équivaut à $\theta' \equiv -\theta\ [\pi]$, on conclut par élimination de θ'

$$\mathrm{A}\mathrm{A}^\top = \mathrm{I}_2 \iff \exists\theta \in \mathbb{R} \ : \ \begin{cases} a + \mathrm{i}c = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \\ d + \mathrm{i}b = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \quad \text{ou} \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\theta+\pi)} \end{cases}$$

□

Corollaire 3.
$$\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \mathrm{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},\ \theta \in \mathbb{R} \right\}$$
$$\mathcal{O}_2^-(\mathbb{R}) = \left\{ \mathrm{S}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix},\ \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

Démonstration. Immédiate par le calcul du déterminant. □

Remarque : Pour θ réel, on a $\mathrm{R}(\theta)$ orthogonalement semblable à $\mathrm{R}(-\theta)$. Pour $r \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ canoniquement associé, il suffit de considérer $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} r$ avec $\mathscr{B} = (e_2, e_1)$ (ce qui change l'orientation de la base).

Théorème 8. *L'application* $\mathrm{R} : \mathbb{R} \to \mathcal{SO}_2(\mathbb{R}),\ \theta \mapsto \mathrm{R}(\theta)$ *est un morphisme du groupe* $(\mathbb{R}, +)$ *vers le groupe* $(\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$*, autrement dit*
$$\forall (\theta, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \qquad \mathrm{R}(\theta)\mathrm{R}(\alpha) = \mathrm{R}(\theta + \alpha)$$
C'est un morphisme surjectif de noyau $\mathrm{Ker}\,\mathrm{R} = 2\pi\mathbb{Z}$ *et le couple* $(\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$ *est un groupe commutatif.*

Démonstration. Le calcul donne $\mathrm{R}(\theta)\mathrm{R}(\alpha) = \mathrm{R}(\theta + \alpha)$ pour tout $(\alpha, \theta) \in \mathbb{R}^2$ ce qui prouve que l'application R est bien un morphisme de groupes. Ce morphisme est surjectif d'après la description de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ faite au corollaire 3 et comme la loi $\times$ est commutative sur $\mathrm{Im}\,\mathrm{R}$, ceci prouve que le groupe $(\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$ est commutatif. Enfin, on a pour θ réel
$$\mathrm{R}(\theta) = \mathrm{I}_2 \iff \theta \in 2\pi\mathbb{Z}$$
Enfin, □

Remarque : En particulier, pour θ réel, on a $\mathrm{R}(\theta)^{-1} = \mathrm{R}(-\theta)$ puisque $\mathrm{I}_2 = \mathrm{R}(\theta - \theta) = \mathrm{R}(\theta)\mathrm{R}(-\theta)$.

Corollaire 4. *Soit* E *espace euclidien orienté de dimension 2. Soit* $r \in \mathcal{SO}(\mathrm{E})$*. Alors il existe* θ *réel unique modulo* 2π *tel que, pour toute base orthonormée directe* $\mathscr{B}$*, on a* $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} r = \mathrm{R}(\theta)$*.*

Démonstration. Soit $r \in \mathcal{SO}(\mathrm{E})$ et $\mathscr{B}$ une base orthonormée directe. D'après le corollaire, 2, on a $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} r \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ et d'après le corollaire 3, il existe θ réel tel que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} r = \mathrm{R}(\theta)$ et pour θ' réel, on a $\mathrm{R}(\theta) = \mathrm{R}(\theta')$ si et seulement si $\theta \equiv \theta'\ [2\pi]$. Soit $\mathscr{B}'$ une base orthonormée directe de E. D'après la proposition 15, on a $\mathrm{P} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} \mathscr{B}' \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ et comme les deux bases sont directes, on a $\det \mathrm{P} > 0$ d'où $\mathrm{P} \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ et par suite, $\mathrm{P} = \mathrm{R}(\alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Ainsi, d'après les formules de changement de base
$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'} r = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{R}(\theta)\mathrm{P} = \mathrm{R}(-\alpha)\mathrm{R}(\theta)\mathrm{R}(\alpha) = \mathrm{R}(-\alpha + \theta + \alpha) = \mathrm{R}(\theta) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} r$$
□

Définition 15. *Soit* E *euclidien orienté de dimension 2. On appelle* rotation vectorielle *ou simplement* rotation *tout élément de* $\mathcal{SO}(\mathrm{E})$*. Étant donnée* $\mathscr{B}$ *une base orthonormée directe de* E*, pour* $r \in \mathcal{SO}(\mathrm{E})$*, notant* $\mathrm{R}(\theta) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} r$ *avec* θ *réel, on dit que* r *est la* rotation d'angle θ *ou que* θ *est une* mesure de l'angle *de la rotation* r*.*

Théorème 9. *Soit* E *euclidien orienté de dimension 2 et* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *deux vecteurs normés de* E*. Il existe une unique rotation* $r \in \mathcal{SO}(\mathrm{E})$ *telle que* $r(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$*.*

Démonstration. Il suffit de compléter respectivement $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ en bases orthonormées directes $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$ et de considérer l'application linéaire qui envoie l'une sur l'autre. La matrice de cette application dans la base $\mathscr{B}_1$ est matrice de passage entre deux base orthonormées directes donc égale à $\mathrm{R}(\theta)$ avec θ réel et la matrice d'une rotation envoyant $\overrightarrow{u}$ sur $\overrightarrow{v}$ dans la base $\mathscr{B}_1$ aura la même première colonne et sera donc égale à $\mathrm{R}(\theta)$. □

Définition 16. *Soit* E *euclidien orienté de dimension 2 et* $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ *deux vecteurs non nuls de* E. *On appelle* mesure de l'angle orienté *d'un couple de vecteurs* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ *une mesure* θ *de l'angle de l'unique rotation qui transforme* $\dfrac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}$ *en* $\dfrac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}$ *que l'on note* $\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}$, *définie modulo* 2π *par :*

$$\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})} \equiv \theta \ [2\pi]$$

Illustration d'une rotation $r \in \mathcal{SO}(\mathbb{R}^2)$ d'angle θ réel.

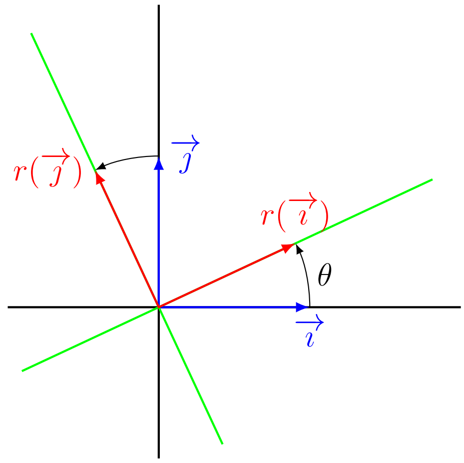

FIGURE 4 – Rotation dans $\mathbb{R}^2$

Théorème 10. *Soit* E *euclidien de dimension 2 et* $s \in \mathcal{O}^-(\mathrm{E})$. *Alors* s *est une symétrie orthogonale et il existe une base orthonormée* $\mathscr{B}$ *telle que* $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Démonstration. Soit $\mathscr{B}'$ base orthonormée de E. Alors $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'} s = \mathrm{S}(\theta)$ avec θ réel. On a $\mathrm{S}(\theta)^2 = \mathrm{I}_2$ et donc s symétrie et $s \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ donc s est une symétrie orthogonale. On a clairement $s \notin \{\pm \mathrm{id}\}$ car $\mathrm{S}(\theta) \neq \pm \mathrm{I}_2$ ou car $\det(s) = -1$. Il en résulte $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{id}) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{id})$ où chacun des sev de la décomposition est une droite vectorielle. En considérant une base orthonormée $\mathscr{B}$ adaptée à cette décomposition, on a $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} s = \mathrm{diag}(1, -1)$. □

Remarque : Les éléments de $\mathcal{O}_2^-(\mathbb{R})$ sont des matrices de réflexions.

Illustration d'une réflexion $s \in \mathcal{O}^-(\mathbb{R}^2)$ avec $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ une base de réduction.

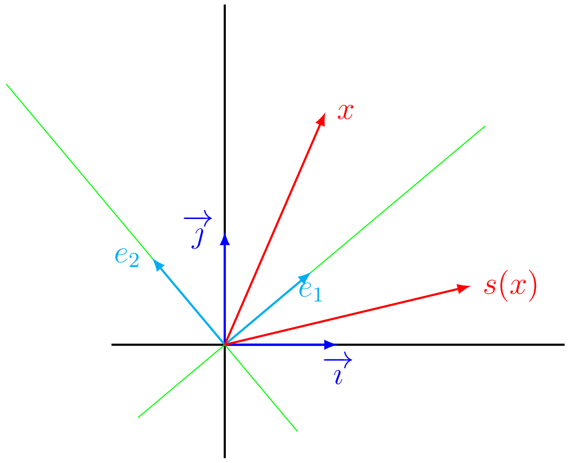

FIGURE 5 – Réflexion dans $\mathbb{R}^2$

3 Réduction d'une isométrie

Proposition 21. *Soit $u \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ et F sev de E stable par u. L'endomorphisme induit u_{F} est une isométrie de F.*

Démonstration. Immédiate. □

Proposition 22. *Soit $u \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ et F sev de E stable par u. Alors $\mathrm{F}^{\perp}$ est stable par u.*

On commence par énoncer le lemme suivant :

Lemme 1. *Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $u \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$ et F sev de E stable par u. Alors, on a $u(\mathrm{F}) = \mathrm{F}$.*

Démonstration. On applique le théorème du rang à $u_{|_{\mathrm{F}}}$ et le résultat suit. □

Démonstration de la proposition 21. D'après le lemme, on a donc $u(\mathrm{F}) = \mathrm{F}$. Soit $(x, y) \in \mathrm{F}^{\perp} \times \mathrm{F}$. Comme $\mathrm{F} = u(\mathrm{F})$, il existe $z \in \mathrm{F}$ tel que $y = u(z)$ d'où

$$\langle u(x), y\rangle = \langle u(x), u(z)\rangle = \langle x, z\rangle = 0$$

On en déduit $u(\mathrm{F}^{\perp}) \perp \mathrm{F}$ ce qui prouve le résultat attendu.

Variante. On peut aussi utiliser le fait que $\mathrm{F}^{\perp}$ est stable par u^*. Comme $u \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$, on a u automorphisme avec $u^* = u^{-1}$ et d'après le lemme, on obtient $u^{-1}(\mathrm{F}^{\perp}) = \mathrm{F}^{\perp}$ puis $u(u^{-1}(\mathrm{F}^{\perp})) = u(\mathrm{F}^{\perp})$ autrement dit $\mathrm{F}^{\perp} = u(\mathrm{F}^{\perp})$. □

Remarque : Les inclusions $u(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}$ et $u(\mathrm{F}^{\perp}) \subset \mathrm{F}^{\perp}$ sont en fait des égalités.

Théorème 11. *Soit $u \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$. Il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E telle que la matrice $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u$ soit diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de la forme*

$$(1) \qquad (-1) \qquad \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \theta \in \mathbb{R}$$

Démonstration. On procède par récurrence forte sur $n = \dim \mathrm{E}$. Le cas $n = 1$ est immédiat et le cas $n = 2$ résulte de ce qui précède. Supposons le résultat vrai jusqu'à $n - 1 \geqslant 2$ fixé. Soit $u \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ avec $\dim \mathrm{E} = n$.

• Si u admet une valeur propre, on considère x une vecteur propre normé associé. On a $u(x) = \pm x$. Comme $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(x)$ est stable par u, alors $\mathrm{F}^\perp$ également et on applique l'hypothèse de récurrence à l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{F}^\perp$. On en déduit une base orthonormée pour $\mathrm{F}^\perp$ que l'on complète par (x).

• Supposons que u n'admette pas de valeur propre. Notons $\mathscr{L}$ une base orthonormée de E et $\mathrm{A} = \mathrm{mat}_{\mathscr{L}} u$. Soit λ valeur propre complexe de A et $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nulle telle que $\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X}$. On a $\mathrm{Im}\,(\lambda) \neq 0$ sans quoi, le polynôme $\chi_\mathrm{A} = \chi_u$ aurait une racine réelle ce qui contredit l'hypothèse. On note $\mathrm{X} = \mathrm{X}_1 + \mathrm{i}\mathrm{X}_2$ avec $\mathrm{X}_1 = \mathrm{Re}\,(\mathrm{X})$, $\mathrm{X}_2 = \mathrm{Im}\,(\mathrm{X})$ et $\lambda = a + \mathrm{i}b$ avec a et b réels. La famille $(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2)$ est libre (dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$). En effet, on a X et $\bar{\mathrm{X}}$ associés à des valeurs propres distinctes d'où $(\mathrm{X}, \bar{\mathrm{X}})$ libre (dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$). Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, il vient

$$\alpha\frac{\mathrm{X}+\bar{\mathrm{X}}}{2} + \beta\frac{\mathrm{X}-\bar{\mathrm{X}}}{2\mathrm{i}} = 0 \iff \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2\mathrm{i}}\right)\mathrm{X} + \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2\mathrm{i}}\right)\bar{\mathrm{X}} = 0$$

et
$$(\alpha - \mathrm{i}\beta, \alpha + \mathrm{i}\beta) = (0,0) \iff (\alpha, \beta) = (0,0)$$

Par conséquent, la famille $(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2) = \left(\dfrac{\mathrm{X}+\bar{\mathrm{X}}}{2}, \dfrac{\mathrm{X}-\bar{\mathrm{X}}}{2\mathrm{i}}\right)$ est libre. Or, on a

$$\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X} \iff \mathrm{AX}_1 + \mathrm{i}\mathrm{AX}_2 = (a\mathrm{X}_1 - b\mathrm{X}_2) + \mathrm{i}(b\mathrm{X}_1 + a\mathrm{X}_2) \iff \begin{cases} \mathrm{AX}_1 = a\mathrm{X}_1 - b\mathrm{X}_2 \\ \mathrm{AX}_2 = b\mathrm{X}_1 + a\mathrm{X}_2 \end{cases}$$

Ceci prouve l'existence d'un plan vectoriel F stable par u. Comme $\mathrm{F}^\perp$ est stable par u, on applique l'hypothèse de récurrence à u_F et $u_{\mathrm{F}^\perp}$ et la concaténation des bases donne le résultat souhaité.

Variante. On suppose que u n'admet pas de valeur propre. Le polynôme caractéristique se décompose en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ de degré 2. Il existe donc un facteur P de cette décomposition tel que $\mathrm{P}(u) \notin \mathrm{GL}(\mathrm{E})$, sinon on aurait $\chi_u(u) \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$ alors que $\chi_u(u) = 0$. Ainsi, il existe a, b réels et $x \in \mathrm{E} \smallsetminus \{0_\mathrm{E}\}$ tels que $(u^2 + au + b\,\mathrm{id}\,)(x) = 0$, c'est-à-dire $u^2(x) = -bx - au(x)$. Par conséquent, l'espace $\mathrm{Vect}\,(x, u(x))$ est stable par u. C'est un plan vectoriel car sinon, on aurait $(x, u(x))$ liée d'où $u(x) = \lambda x$ avec λ un réel ce qui est exclu. On conclut comme précédemment. □

Corollaire 5. *Soit* E *euclidien orienté de dimension 3 et* $r \in \mathcal{SO}(\mathrm{E})$*. Alors il existe une base orthonormée directe* $\mathscr{B}$ *et* $\theta \in \mathbb{R}$ *tels que*

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Démonstration. Soit $r \in \mathcal{SO}(\mathrm{E})$. D'après le théorème de réduction d'une isométrie, il existe une base $\mathscr{B}$ orthonormée telle que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} r$ est diagonale par blocs, formée de blocs (1),(-1) ou $\mathrm{R}(\theta)$ avec θ réel. Si $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} r$ est formée de (1) ou (-1), comme $r \in \mathcal{SO}(\mathrm{E})$, alors on a $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} r = \mathrm{I}_3$ ou $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} r = \mathrm{diag}(1, -1, -1)$ quitte à réordonner $\mathscr{B}$. Ces cas correspondent aux situations $\theta \equiv 0\ [\pi]$. Sinon, la matrice $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} r$ n'est pas diagonale et comme $r \in \mathcal{SO}(\mathrm{E})$, on a $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} r = \mathrm{diag}(1, \mathrm{R}(\theta))$ quitte à réordonner $\mathscr{B}$. Enfin, quitte à opposer le premier vecteur de cette base, on peut la choisir directe. □

Corollaire 6. *Soit* $\mathrm{A} \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$*. Il existe* $\mathrm{P} \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ *et* θ *réel tel que*

$$\mathrm{P}^\top \mathrm{AP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Démonstration. Soit $r \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associée à A avec $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté (canoniquement). On a $r \in \mathcal{SO}(\mathbb{R}^3)$ d'où l'existence de θ réel et $\mathscr{B}$ une base orthonormée directe tels que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} r = \mathrm{diag}(1, \mathrm{R}(\theta))$. On pose $\mathrm{P} = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}} \mathscr{B}$. On a $\mathrm{P} \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ comme matrice de passage entre deux bases orthonormées directes et par changement de base, on a

$$\mathrm{P}^\top \mathrm{AP} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} r = \mathrm{diag}(1, \mathrm{R}(\theta))$$

□

Définition 17. *Soit* E *euclidien orienté de dimension 3 et* $r \in \mathcal{SO}(\mathrm{E}) \setminus \{\mathrm{id}\}$. *Étant donné* a *qui engendre* $\mathrm{Ker}\,(r - \mathrm{id})$, *notant* $\mathscr{B}$ *une base orthonormée directe obtenue par complétion de* $(a/\|a\|)$, *on a* $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} r = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{R}(\theta) \end{array}\right)$ *avec* θ *réel et on dit que* r *est la* rotation d'axe dirigé par a d'angle θ *notée* $r = \mathrm{rot}(a, \theta)$.

Remarques : (1) Comme $r \neq \mathrm{id}$, on a $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$ et $\chi_r = (\mathrm{X} - 1)(\mathrm{X} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})(\mathrm{X} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})$ scindé dans $\mathbb{C}$ avec 1 racine simple d'où $\dim \mathrm{E}_1(r) = 1$.
(2) Notant $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(a)^\perp$, l'induit r_{F} est une rotation du plan F d'où l'existence et unicité modulo 2π d'un réel θ tel que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{F}}} r_{\mathrm{F}} = \mathrm{R}(\theta)$ avec $\mathscr{B}_{\mathrm{F}}$ base de F extraite de $\mathscr{B}$ (qui fixe l'orientation de F).

Illustration : Soit $x \in \mathrm{E}$. On décompose $x = y + z$ avec $(y, z) \in \mathrm{Ker}\,(r - \mathrm{id}) \times \mathrm{Ker}\,(r - \mathrm{id})^\perp$.

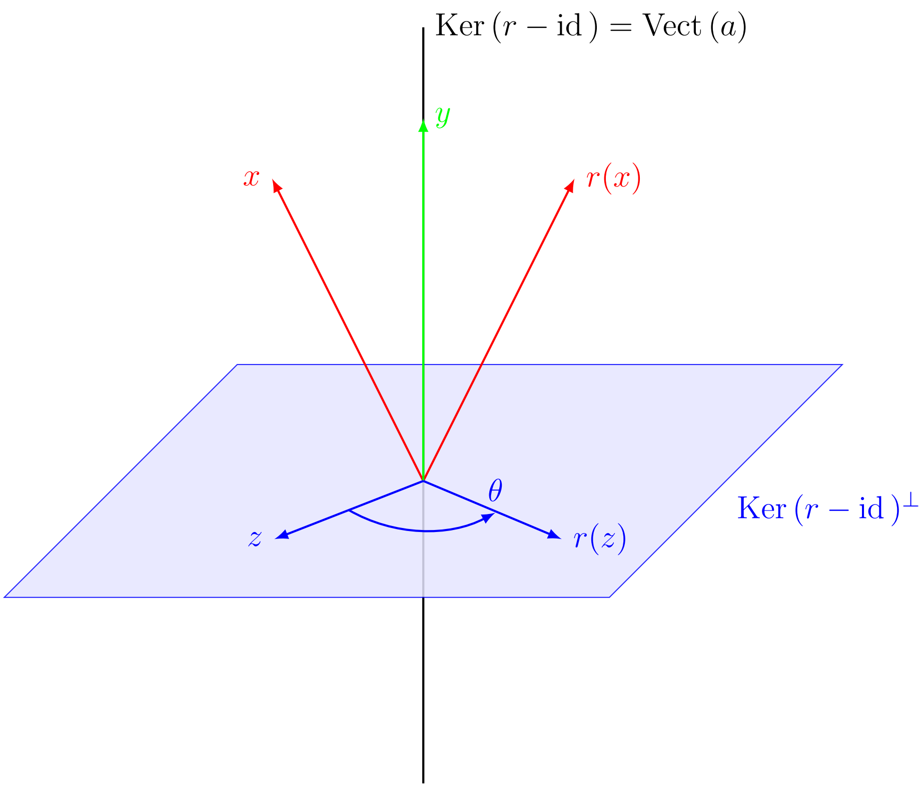

FIGURE 6 – Rotation $r = \mathrm{rot}(a, \theta)$

Remarque : L'axe $\mathrm{Ker}\,(r - \mathrm{id})$ et l'angle θ ne suffisent pas à caractériser la rotation. En effet, si on prend $-a$ au lieu de a, il faut effectuer une rotation d'angle $-\theta$ pour réaliser la même transformation. D'où la nécessité de préciser un vecteur et un angle pour une rotation donnée.

Remarque « culturelle » : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ euclidien orienté. On suppose a normé. On a

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad r(x) = (1-\cos(\theta))\langle x, a\rangle a + \cos(\theta)x + \sin(\theta)(a \wedge x)$$

Retrouvons cette formule. Pour $x \in \mathrm{E}$, on a

$$x = y + z \quad \text{avec} \quad y = \langle x, a\rangle a = p_{\mathrm{Vect}\,(a)}(x) \quad \text{et} \quad z = x - \langle x, a\rangle a$$

Par suite $$r(x) = r(y) + r(z) = y + r(z)$$

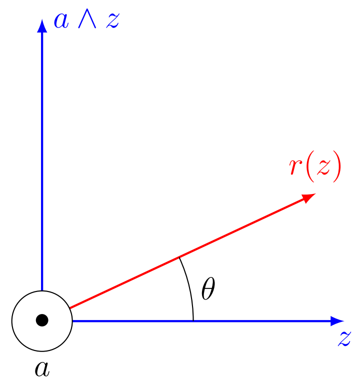

FIGURE 7 – Rotation $\mathrm{rot}(a, \theta)$

En remarquant que la famille $(a, z, a \wedge z)$ est orthogonale directe avec $\|z\| = \|a \wedge z\|$, on obtient

$$\begin{aligned} r(z) &= \cos(\theta)z + \sin(\theta)(a \wedge z) \\ &= \cos(\theta)(x - \langle x, a\rangle a) + \sin(\theta)\,[a \wedge (x - \langle x, a\rangle a)] \\ r(z) &= \cos(\theta)(x - \langle x, a\rangle a) + \sin(\theta)(a \wedge x) \end{aligned}$$

V Endomorphismes auto-adjoints

Une matrice $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *symétrique* si elle vérifie $\mathrm{M}^\top = \mathrm{M}$ ou de manière équivalente $m_{i,j} = m_{j,i}$ pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2$. On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. L'ensemble $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est un sev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, par exemple en écrivant $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}\,\varphi$ avec $\varphi : \mathrm{M} \mapsto \mathrm{M} - \mathrm{M}^\top$ clairement linéaire. Pour $\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, on peut écrire

$$\mathrm{M} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{i,j}\mathrm{E}_{i,j} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{m_{i,j}}{1 + \delta_{i,j}} \underbrace{(\mathrm{E}_{i,j} + \mathrm{E}_{j,i})}_{\in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})}$$

La famille $(\mathrm{E}_{i,j} + \mathrm{E}_{j,i})_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n}$ est donc génératrice de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et est libre donc forme une base de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

1 Définition

Définition 18. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. L'endomorphisme u est dit* auto-adjoint *si $u = u^*$, c'est-à-dire*

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$$

Vocabulaire : On dit aussi que u est un *endomorphisme symétrique*.

Notations : On note $\mathscr{S}(\mathrm{E})$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints.

Proposition 23. *L'ensemble* $\mathscr{S}(\mathrm{E})$ *est un sev de* $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.

Démonstration. L'application $\Phi : \mathscr{L}(\mathrm{E}) \to \mathscr{L}(\mathrm{E}), u \mapsto u - u^*$ est linéaire par linéarité de l'adjonction et $\mathscr{S}(\mathrm{E}) = \mathrm{Ker}\ \Phi$. □

Proposition 24. *Soit* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ *et* $\mathscr{B}$ *une base orthonormée de* E. *On a*

$$u \in \mathscr{S}(\mathrm{E}) \iff \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$$

Démonstration. On a

$$u \in \mathscr{S}(\mathrm{E}) \iff \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u^* \iff \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u = (\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u)^\top$$

d'où le résultat. □

Remarque : Soit $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associé à S. Alors $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ puisque $\mathscr{C}$ base canonique est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire canonique.

2 Propriétés

Proposition 25. *Soit* p *un projecteur de* E. *On a*

$$p \text{ projecteur orthogonal} \iff p \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$$

Démonstration. Soit p projecteur orthogonal et $(x, y) \in \mathrm{E}^2$. On a

$$\langle p(x), y\rangle = \langle p(x), p(y) + y - p(y)\rangle = \langle p(x), p(y)\rangle$$

expression symétrique en x et y d'où le résultat. Supposons $p \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$. On a

$$\forall (x, y) \in \mathrm{Ker}\ p \times \mathrm{Im}\ p \qquad \langle x, y\rangle = \langle x, p(y)\rangle = \langle p(x), y\rangle = 0$$

d'où le résultat. On a utilisé l'égalité $\mathrm{Im}\ p = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{id} - p)$. □

Proposition 26. *Soit* $u \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$ *et soient* $\lambda, \mu \in \mathrm{Sp}\,(u)$ *avec* $\lambda \neq \mu$. *On a* $\mathrm{E}_\lambda(u) \perp \mathrm{E}_\mu(u)$.

Démonstration. Soit $(x, y) \in \mathrm{E}_\lambda(u) \times \mathrm{E}_\mu(u)$. On a

$$\lambda\langle x, y\rangle = \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle = \mu\langle x, y\rangle \Longrightarrow \underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0}\langle x, y\rangle = 0 \Longrightarrow x \perp y$$

□

Proposition 27. *Soit* $u \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$ *et* F *un sev stable par* u. *Alors l'endomorphisme induit* u_F *est un endomorphisme auto-adjoint de* F.

Démonstration. Immédiate. □

Proposition 28. *Soit* $u \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$ *et* F *un sev stable par* u. *Alors* $\mathrm{F}^\perp$ *est stable par* u.

Démonstration. Conséquence immédiate de la proposition 4. □

3 Théorème spectral

Théorème 12. *Soit $u \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$. Alors u admet une valeur propre.*

Démonstration. Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormale de E et $\mathrm{M} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u$. On a $\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Soit λ racine de χ_{M} dans $\mathbb{C}$. Soit $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul tel que $\mathrm{MX} = \lambda \mathrm{X}$. En conjuguant puis en multipliant à gauche par $\mathrm{X}^\top$, on trouve $\mathrm{X}^\top \mathrm{M}\bar{\mathrm{X}} = \bar{\lambda}\mathrm{X}^\top\bar{\mathrm{X}}$. Puis partant de $\mathrm{MX} = \lambda\mathrm{X}$, en transposant puis en multipliant par $\bar{\mathrm{X}}$ à droite, on trouve $\mathrm{X}^\top\mathrm{M}\bar{\mathrm{X}} = \lambda\mathrm{X}^\top\bar{\mathrm{X}}$. Comme $\mathrm{X}^\top\bar{\mathrm{X}} > 0$, il s'ensuit par identification que $\lambda = \bar{\lambda}$, autrement dit λ racine réelle de $\chi_{\mathrm{M}} = \chi_u$ d'où le résultat. $\square$

Théorème 13 (Théorème spectral). *Soit $u \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$. Alors*

$$\mathrm{E} = \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)}} \mathrm{E}_\lambda(u)$$

ou, de manière équivalente, il existe une base orthonormée de vecteurs propres de u.

Démonstration. Soit $\mathrm{F} = \overset{\perp}{\bigoplus\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)}} \mathrm{E}_\lambda(u)$ sev non réduit à $\{0_{\mathrm{E}}\}$ d'après le théorème précédent. On vérifie sans difficulté que F est stable par u. Supposons $\mathrm{F}^\perp \neq \{0_{\mathrm{E}}\}$. On a $\mathrm{F}^\perp$ stable par u et l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{F}^\perp$ est symétrique donc admet un vecteur propre qui l'est aussi pour u. On aurait alors $\mathrm{F} \cap \mathrm{F}^\perp$ non réduit à $\{0_{\mathrm{E}}\}$ ce qui est absurde. La décomposition équivaut à l'existence d'une base orthonormée de vecteurs propres de u. Pour le sens direct, il suffit de considérer une base orthonormée adaptée à la décomposition. Pour le sens indirect, on a la décomposition souhaitée par diagonalisation et celle-ci est orthogonale car u est auto-adjoint.

Variante : On peut aussi procéder par récurrence forte sur $n = \dim \mathrm{E}$. Par exemple, pour prouver l'existence d'une base orthonormée de vecteurs propres, il suffit de concaténer des bases orthonormées de vecteurs propres pour u_{F} et $u_{\mathrm{F}^\perp}$ avec $\mathrm{F} = \mathrm{E}_\lambda(u)$ (si $\mathrm{F} = \mathrm{E}$ rien à faire), les vecteurs propres pour ces endomorphismes induits étant aussi vecteurs propres pour u. $\square$

Corollaire 7. *Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Il existe $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{D} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que*

$$\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^\top$$

Démonstration. La base canonique $\mathscr{C}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ (pour le produit scalaire canonique). Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associé à A. D'après la proposition 24, on a $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ et d'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de vecteurs propres. On pose alors $\mathrm{P} = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}} \mathscr{B}$, matrice orthogonale en tant que matrice de passage entre deux bases orthonormées, et le résultat suit d'après les formules de changement de base. $\square$

⚠ Avertissement : Ne pas oublier de mentionner « matrice symétrique **réelle** » pour invoquer le théorème spectral dans sa version matricielle.

Vocabulaire : On dit que A est *orthogonalement semblable* à une matrice diagonale.

VI Positivité

1 Définitions

Définition 19. *Soit $u \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$. L'endomorphisme u est dit* positif *si*

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \langle u(x), x\rangle \geqslant 0$$

L'endomorphisme u est dit défini positif *si*

$$\forall x \in \mathrm{E} \smallsetminus \{0_{\mathrm{E}}\} \qquad \langle u(x), x\rangle > 0$$

Notations : On note $\mathscr{S}^{+}(\mathrm{E})$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints positifs de E et $\mathscr{S}^{++}(\mathrm{E})$ l'ensemble des ensemble des endomorphismes auto-adjoints définis positifs de E.

Définition 20. *Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. La matrice* M *est dite* positive *si*

$$\forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \qquad \langle \mathrm{MX}, \mathrm{X}\rangle \geqslant 0$$

La matrice M *est dite* définie positive *si*

$$\forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \smallsetminus \{0\} \qquad \langle \mathrm{MX}, \mathrm{X}\rangle > 0$$

Notations : On note $\mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives et $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des ensemble des matrices symétriques définies positives.

Remarque : Le calcul donne $\langle \mathrm{MX}, \mathrm{X}\rangle = \mathrm{X}^{\top}\mathrm{MX} = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i x_j m_{i,j}$.

Proposition 29. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et $\mathscr{B}$ une base orthonormée de* E. *On a*

$$u \in \mathscr{S}^{+}(\mathrm{E}) \iff \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u \in \mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R})$$

et

$$u \in \mathscr{S}^{++}(\mathrm{E}) \iff \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

Démonstration. On sait que $u \in \mathscr{S}(\mathrm{E}) \iff \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. L'équivalence pour le caractère positif ou défini positif est immédiate puisque pour $x \in \mathrm{E}$, notant $\mathrm{X} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} x$ et $\mathrm{M} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u$, on a

$$\langle u(x), x\rangle = \langle \mathrm{X}, \mathrm{MX}\rangle$$

□

2 Propriétés

Les résultats qui suivent sont déclinés vectoriellement mais existent à l'identique en version matricielle.

Proposition 30. *Soit $u \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$, $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base orthonormée de vecteurs propres de u associés aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (répétées avec multiplicité) et $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \in \mathrm{E}$. On a*

$$\langle u(x), x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

Avec $\mathrm{E} = \overset{\perp}{\bigoplus\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u)}} \mathrm{E}_{\lambda}(u)$ et $x \in \mathrm{E}$ où $x = \sum\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u)} x_{\lambda}$ la décomposition associée dans la somme directe, on a

$$\langle u(x), x\rangle = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u)} \lambda \|x_{\lambda}\|^2$$

Démonstration. On a

$$\langle u(x), x\rangle = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i y_j \langle u(e_i), e_j\rangle = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \lambda_i x_i y_j \underbrace{\langle e_i, e_j\rangle}_{=\delta_{i,j}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

Avec la décomposition orthogonale $x = \sum_{\lambda\in \mathrm{Sp}\,(u)} x_\lambda$, il vient

$$\langle u(x), x\rangle = \sum_{(\lambda,\mu)\in \mathrm{Sp}\,(u)^2} \langle u(x_\lambda), x_\mu\rangle = \sum_{(\lambda,\mu)\in \mathrm{Sp}\,(u)^2} \lambda \underbrace{\langle x_\lambda, x_\mu\rangle}_{=0 \text{ si } \lambda\neq\mu} = \sum_{\lambda\in \mathrm{Sp}\,(u)} \lambda \|x_\lambda\|^2$$

□

Remarque : Pour la version matricielle, on considère $\mathrm{P} \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{P}^\top \mathrm{MP} = \mathrm{D}$ diagonale. Ainsi, pour X et Y dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{X} = \mathrm{PY}$, on a

$$\langle \mathrm{MX}, \mathrm{X}\rangle = \mathrm{X}^\top \mathrm{MX} = \mathrm{Y}^\top \mathrm{DY} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$$

Théorème 14. *Soit $u \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$. On a*

$$u \in \mathscr{S}^+(\mathrm{E}) \iff \mathrm{Sp}\,(u) \subset [\,0\,; +\infty\,[$$

et

$$u \in \mathscr{S}^{++}(\mathrm{E}) \iff \mathrm{Sp}\,(u) \subset \,]\,0\,; +\infty\,[$$

Démonstration. Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)$ et $x \in \mathrm{E}_\lambda(u)$ qu'on choisit normé, il vient

$$\langle u(x), x\rangle = \lambda \geqslant 0 \text{ si } u \in \mathscr{S}^+(\mathrm{E}) \quad \text{et} \quad > 0 \text{ si } u \in \mathscr{S}^{++}(\mathrm{E})$$

Réciproquement, si $\mathrm{Sp}\,(u) \subset [\,0\,; +\infty\,[$, l'expression obtenue à la proposition 30 permet d'établir $\langle u(x), x\rangle \geqslant 0$ pour $x \in \mathrm{E}$. Si $\mathrm{Sp}\,(u) \subset \,]\,0\,; +\infty\,[$ et $x \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$, une de ces coordonnées x_i est non nulle et on en déduit $\langle u(x), x\rangle > 0$. □

Théorème 15 (À savoir refaire). *Soit $u \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$ et $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de u. On a*

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \lambda_1\|x\|^2 \leqslant \langle u(x), x\rangle \leqslant \lambda_n\|x\|^2$$

et si une des inégalités est une égalité avec x non nul, alors x est vecteur propre associé.

Démonstration. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ base orthonormée de vecteurs propres associés à $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et $x \in \mathrm{E}$ avec $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et les x_i réels et aussi $x = \sum_{\lambda\in \mathrm{Sp}\,(u)} x_\lambda$ avec $x_\lambda \in \mathrm{E}_\lambda(u)$ pour $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)$. D'après la première expression obtenue dans la proposition 30, on a

$$\lambda_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant \langle u(x), x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \leqslant \lambda_n \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

et $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ d'où l'encadrement. Supposons $\langle u(x), x\rangle = \lambda_n\|x\|^2$. Comme $\|x\|^2 = \sum_{\lambda\in \mathrm{Sp}\,(u)} \|x_\lambda\|^2$ d'après le théorème de Pythagore, il vient avec la deuxième expression de la proposition 30

$$\sum_{\lambda\in \mathrm{Sp}\,(u)\setminus\{\lambda_n\}} \underbrace{(\lambda - \lambda_n)}_{<0} \|x_\lambda\|^2 = 0 \iff x = x_{\lambda_n} \in \mathrm{E}_{\lambda_n}(u)$$

On fait de même pour le cas d'égalité concernant λ_1. □

Annexe

Génération aléatoire d'une matrice orthogonale

On présente en langage python un procédé pour générer aléatoirement une matrice orthogonale.

La fonction `ps(A,B)` d'arguments `A, B` deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ renvoie $\langle \mathrm{A}, \mathrm{B}\rangle = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}b_{i,j}$ et la fonction `isortho(A)` d'argument `A` une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ renvoie `True` si la matrice A est orthogonale et `False` sinon.

```
def ps(A,B):
    return np.trace(A.T.dot(B))

def isortho(A):
    eps=1e-8
    B=A.T.dot(A)-np.eye(len(A))
    return ps(B,B)<eps
```

On rappelle l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt :

Algorithme 1 : Orthonormalisation

Entrées : $[u_1, \ldots, u_p]$ libre
Résultat : $[v_1, \ldots, v_p]$ orthonormée
$res \leftarrow [\ u_1/\|u_1\|\ ]$
pour $k \in [\![2\,;\, p]\!]$ **faire**
$\quad z \leftarrow u_k - \sum\limits_{i=1}^{k-1} \langle u_k, v_i\rangle\, v_i$
$\quad res \leftarrow res + [\ z/\|z\|\ ]$
retourner res

Dans l'algorithme, l'étape itérative consiste à construire $z_k = u_k - p_{\mathrm{F}_k}(u_k)$ où

$$\mathrm{F}_k = \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_{k-1}) = \mathrm{Vect}\,(v_1, \ldots, v_{k-1})$$

Ainsi, on a
$$v_k = \frac{z_k}{\|z_k\|} \in \mathrm{F}_k^{\perp} \quad \text{d'où} \quad v_k \perp v_i \quad \forall i \in [\![1\,;\, k-1]\!]$$

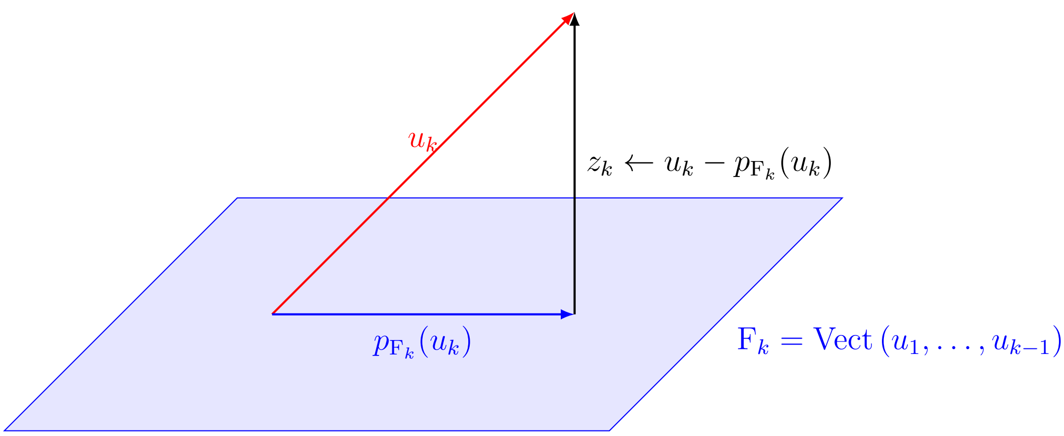

Figure 8 – Étape itérative de l'algorithme d'orthonormalisation

Une implémentation de l'algorithme est donnée par :

```
def norm(u):
    # normalise le vecteur u
    return u/alg.norm(u)

def ortho(A):
    # Renvoie la matrice constituée des colonnes orthonormalisées
    # à partir des colonnes de la matrice A
    p=A.shape[1]
    v=[norm(A[:,0])]
    for k in range(1,p):
        u=A[:,k]
        z=u-sum([np.dot(v[i],u)*v[i] for i in range(k)])
        v.append(norm(z))
    return np.array(v).T
```

On remarque que l'implémentation d'une fonction de *normalisation* qui prend un vecteur en entrée et le normalise rend la fonction `ortho` très lisible avec une écriture assez légère.

On applique l'algorithme d'orthonormalisation aux colonnes d'une matrice $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang égal à p (avec $p \leqslant n$) transmise en argument. Si $p = n$, la famille orthonormalisée $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Ainsi, on peut facilement générer aléatoirement une matrice orthogonale par orthonormalisation d'une matrice tirée aléatoirement dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$:

```
>>> A=rd.rand(3,3)
>>> B=ortho(A)
>>> np.dot(B.T,B)
array([[ 1.00000000e+00,  5.05754733e-15, -8.89543056e-15],
       [ 5.05754733e-15,  1.00000000e+00, -1.03875092e-15],
       [ -8.92318613e-15, -1.03875092e-15,  1.00000000e+00]])
>>> isortho(B)
True
```