Devoir en temps libre n°11

Problème I

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ muni de

$$\forall(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle \mathrm{P},\mathrm{Q}\rangle = \int_0^{\pi} \mathrm{P}(\cos(\theta))\mathrm{Q}(\cos(\theta))\mathrm{d}\theta$$

On pose $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{X},\mathrm{X}^2)$.

1. Justifier que $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \mapsto \langle \mathrm{P},\mathrm{Q}\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Déterminer $p_{\mathrm{F}}(1)$.
3. En déduire $\mathrm{d}(1,\mathrm{F})$.

Problème II

L'objet de ce problème consiste en l'étude et la détermination de

$$\Delta_n = \operatorname*{Inf}_{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} \left(1 + \sum_{k=1}^{n} x_k t^k\right)^2 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

avec n entier non nul.

1. Justifier, pour $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 + \sum_{k=1}^{n} x_k t^k\right)^2 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ puis montrer que la borne inférieure Δ_n est bien définie.

   On note $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ et on pose

   $$\forall(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle \mathrm{P},\mathrm{Q}\rangle = \int_0^{+\infty} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

2. Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
3. Déterminer $\langle 1,\mathrm{X}^k\rangle$ pour k entier.
4. Montrer qu'il existe un unique $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

   $$\Delta_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \sum_{k=1}^{n} a_k t^k\right)^2 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

   puis établir l'égalité $\qquad \Delta_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} k!a_k$

5. On introduit le polynôme $\mathrm{P}_n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ défini par

   $$\mathrm{P}_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k(\mathrm{X}+1)\dots(\mathrm{X}+k)$$

   Montrer que $\mathrm{P}_n(j) = 0$ pour tout $j \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!]$.
6. Déterminer une écriture explicite de P_n.
7. Conclure.