Corrigé du devoir en temps libre n°10

Problème

Nombres de partitions

1. Pour former une partition de $[\![1\,;\, n]\!]$ en k parties, on doit associer à chaque entier de $[\![1\,;\, n]\!]$ l'une des k parties, c'est-à-dire choisir une application de $[\![1\,;\, n]\!]$ dans $[\![1\,;\, k]\!]$. Ainsi

$$\boxed{\text{Le nombre de partitions de } [\![1\,;\, n]\!] \text{ en } k \text{ parties est majoré par } \operatorname{Card} [\![1\,;\, p]\!]^{[\![1\,;\, n]\!]} = k^n.}$$

Remarque : Il s'agit juste d'une majoration puisqu'il y a des applications non surjectives dans $[\![1\,;\, n]\!]^{[\![1\,;\, p]\!]}$.

2. Il ne peut y avoir plus de n parties disjointes non vides de $[\![1\,;\, n]\!]$ et si $k = 1$, l'unique partie est l'ensemble $[\![1\,;\, n]\!]$ tout entier d'où

$$\boxed{\forall k > n \qquad \mathrm{S}(n, k) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{S}(n, 1) = 1}$$

3. Pour former une partition de $[\![1\,;\, n]\!]$ en k parties, on peut choisir la partie $\{n\}$ puis choisir une partition de $[\![1\,;\, n-1]\!]$ en $k-1$ parties d'où $\mathrm{S}(n-1, k-1)$ choix ou alors, on choisit une partition de $[\![1\,;\, n-1]\!]$ en k parties et on complète une des parties par n d'où $k\mathrm{S}(n-1, k)$ choix et on conclut

$$\boxed{\mathrm{S}(n, k) = \mathrm{S}(n-1, k-1) + k\mathrm{S}(n-1, k)}$$

Nombres de Bell

4. Choisir une partition de $[\![1\,;\, n]\!]$, c'est choisir $k \in [\![1\,;\, n]\!]$ le nombre de parties puis $\mathrm{S}(n, k)$ le nombre de partitions en k parties. Avec la convention $\mathrm{S}(n, 0) = 0$, on conclut

$$\boxed{\text{Pour } n \text{ entier non nul, le nombre de partition de } [\![1\,;\, n]\!] \text{ est } \mathrm{B}_n.}$$

5. Soit n entier. Choisir une partition de $[\![1\,;\, n+1]\!]$, c'est choisir une partie de $[\![1\,;\, n+1]\!]$ contenant $n+1$ (donc une partie de $[\![1\,;\, n]\!]$ complétée par $\{n+1\}$) puis choisir une partition de l'ensemble des éléments restants. Il s'agit donc choisir $k \in [\![0\,;\, n]\!]$ puis choisir une partie de $[\![1\,;\, n]\!]$ à k éléments que l'on complète par $\{n+1\}$ et choisir une partition des $n-k$ éléments restants. Ainsi, on a

$$\mathrm{B}_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{B}_{n-k}$$

Avec un changement d'indice et le relation $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, on conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{B}_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{B}_k}$$

6. On procède par récurrence forte. L'initialisation pour $n = 0$ est immédiate. Supposons le résultat vrai jusqu'à n entier. Il vient

$$\mathrm{B}_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{B}_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k! = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} \leqslant \sum_{k=0}^{n} n! = (n+1)!$$

ce qui clôt la récurrence. On conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathrm{N} \qquad \frac{\mathrm{B}_n}{n!} \leqslant 1}$$

7. La suite $\left(\dfrac{\mathrm{B}_n}{n!}\right)_n$ est bornée d'où $\boxed{\mathrm{R} \geqslant 1}$

8. Par dérivation d'une série entière, il vient pour $x \in \left]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\right[$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{B}_n}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{B}_{n+1}}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{B}_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} \right) x^n$$

D'après le théorème du produit de Cauchy pour les séries entières $\sum \dfrac{\mathrm{B}_n}{n!} x^n$ et $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ de rayons de convergence respectifs R et $+\infty$, on conclut

$$\boxed{\forall x \in \left]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\right[\qquad f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{B}_n}{n!} x^n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right) = \mathrm{e}^x f(x)}$$

9. On résout l'équation différentielle dont f est solution sur $\left]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\right[$. Il s'ensuit que $f \in \operatorname{Vect}\left(x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}\right)$ et $f(0) = 1$ d'où

$$\boxed{\forall x \in \left]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\right[\qquad f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x - 1}}$$

Une suite de polynômes

10. On a $\deg \mathrm{H}_k = k$ pour tout k entier. Par conséquent, la famille $(\mathrm{H}_0, \ldots, \mathrm{H}_n)$ est une famille de polynômes non nuls échelonnée en degré qui donc forme une famille libre de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ et comme $\operatorname{Card}(\mathrm{H}_0, \ldots, \mathrm{H}_n) = n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, on conclut

$$\boxed{\text{La famille } (\mathrm{H}_0, \ldots, \mathrm{H}_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[\mathrm{X}].}$$

11. Soit k entier. On a

$$\mathrm{H}_{k+1} = \prod_{i=0}^{k} (\mathrm{X} - i) = \mathrm{H}_k(\mathrm{X} - k) = \mathrm{X}\mathrm{H}_k - k\mathrm{H}_k$$

D'où $\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{H}_{k+1} + k\mathrm{H}_k = \mathrm{X}\mathrm{H}_k}$

12. On procède par récurrence sur n. L'initialisation pour $n = 0$ est immédiate. Supposons le résultat vrai pour n entier. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{X}^{n+1} &= \mathrm{X} \times \mathrm{X}^n = \mathrm{X} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{S}(n,k)\mathrm{H}_k = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{S}(n,k)\mathrm{X}\mathrm{H}_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{S}(n,k)(\mathrm{H}_{k+1} + k\mathrm{H}_k) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{S}(n,k)\mathrm{H}_{k+1} + \sum_{k=0}^{n} k\mathrm{S}(n,k)\mathrm{H}_k
\end{aligned}$$

Avec un changement d'indice dans la première somme et en complétant la deuxième pour $k = n + 1$, on obtient avec la relation de la question 3

$$\mathrm{X}^{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{S}(n,k-1)\mathrm{H}_k + \sum_{k=1}^{n+1} k\mathrm{S}(n,k)\mathrm{H}_k = \sum_{k=1}^{n} \left[\mathrm{S}(n,k-1) + k\mathrm{S}(n,k)\right] \mathrm{H}_k = \sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{S}(n+1,k)\mathrm{H}_k$$

et en complétant pour $k = 0$, l'hérédité est établie. Ainsi

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{X}^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{S}(n,k)\mathrm{H}_k}$$

13. Soient n et k entiers . On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{B}_n = \sum_{\ell=0}^{n} \mathrm{S}(n,\ell) \geqslant \mathrm{S}(n,k)$$

d'où
$$\frac{\mathrm{S}(n,k)}{n!} \leqslant \frac{\mathrm{B}_n}{n!} \leqslant 1$$

Par conséquent

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de la série entière définissant } f_k \text{ a un rayon de convergence} \geqslant 1.}$$

14. Soit k entier. La fonction g_k est dérivable par théorèmes généraux. Par dérivation, il vient

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g_k'(x) = \frac{(\mathrm{e}^x - 1)^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{e}^x = \frac{(\mathrm{e}^x - 1)^{k-1}}{(k-1)!}(\mathrm{e}^x - 1 + 1)$$

Ainsi
$$\boxed{\text{La fonction } g_k \text{ est solution de } y' = ky + \frac{(\mathrm{e}^x - 1)^{k-1}}{(k-1)!}.}$$

15. Supposons k entier non nul. Par dérivation d'une série entière, on a pour $x \in \,]-1\,;1\,[$

$$f_k'(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathrm{S}(n,k)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=k}^{+\infty} \left[\mathrm{S}(n-1,k-1) + k\mathrm{S}(n-1,k)\right]\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

Par linéarité du symbole somme, les séries concernées étant convergentes pour $x \in \,]-1\,;1\,[$, on trouve après changement d'indice

$$\begin{aligned} f_k'(x) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathrm{S}(n-1,k-1)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + k\sum_{n=k+1}^{+\infty} \mathrm{S}(n-1,k)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n=k-1}^{+\infty} \mathrm{S}(n,k-1)\frac{x^n}{n!} + k\sum_{n=k}^{+\infty} \mathrm{S}(n,k)\frac{x^n}{n!} \\ f_k'(x) &= kf_k(x) + f_{k-1}(x) \end{aligned}$$

Procédons par récurrence sur k. On pose

$$\mathscr{P}(k) : \quad f_k = g_k$$

L'initialisation $\mathscr{P}(0)$ est immédiate. Supposons $\mathscr{P}(k-1)$ vraie pour $k-1$ entier fixé. Alors, la fonction f_k est solution du même problème de Cauchy que la fonction g_k :

$$\begin{cases} y' &= ky + f \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

D'après l'unicité du théorème de Cauchy linéaire, on en déduit $f_k = g_k$ ce qui clôt la récurrence. On conclut

$$\boxed{\forall (k,x) \in \mathbb{N} \times \,]-1\,;1\,[\qquad \frac{(\mathrm{e}^x - 1)^k}{k!} = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathrm{S}(n,k)\frac{x^n}{n!}}$$