

Suites et séries de fonctions

Exercice 1.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$. On calcule pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=0}^n a_k(x) b_k(x) = a_0(x) b_0(x) + \sum_{k=1}^n a_k(x) (B_k(x) - B_{k-1}(x)) \\ &= a_0(x) \underbrace{b_0(x)}_{=B_0(x)} + \sum_{k=1}^n a_k(x) B_k(x) - \underbrace{\sum_{k=1}^n a_k(x) B_{k-1}(x)}_{= \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}(x) B_k(x)} \\ &= a_n(x) B_n(x) + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k(x) - a_{k+1}(x)) B_k(x) \end{aligned}$$

Or, pour tout $x \in I$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$|a_n(x) B_n(x)| \leq M |a_n(x)| \quad \text{et} \quad |(a_k(x) - a_{k+1}(x)) B_k(x)| \leq M |a_k(x) - a_{k+1}(x)|$$

Par hypothèses $a_n(x) \rightarrow 0$ donc $M |a_n(x)| \rightarrow 0$ et par encadrement $a_n(x) B_n(x) \rightarrow 0$, et $M |a_k(x) - a_{k+1}(x)|$ est le terme général d'une série convergente, donc par critère de majoration de séries à termes ≥ 0 , $\sum (a_k(x) - a_{k+1}(x)) B_k(x)$ converge absolument, donc converge.

Par opérations, $(S_n(x))$ converge, donc $\sum u_n$ converge simplement. Notons S sa somme.

Montrons que la convergence est uniforme. Pour tout $x \in I$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la reprise des calculs précédents donne :

$$\begin{aligned} |S(x) - S_n(x)| &= \left| 0 + \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k(x) - a_{k+1}(x)) B_k(x) - a_n(x) B_n(x) - \sum_{k=0}^{n-1} (a_k(x) - a_{k+1}(x)) B_k(x) \right| \\ &= \left| -a_n(x) B_n(x) + \sum_{k=n}^{+\infty} (a_k(x) - a_{k+1}(x)) B_k(x) \right| \\ &\leq |a_n(x) B_n(x)| + \sum_{k=n}^{+\infty} |a_k(x) - a_{k+1}(x)| \underbrace{|B_k(x)|}_{\leq M} \leq M \|a_n\|_{\infty} + M \left\| \sum_{k=n}^{+\infty} |a_k - a_{k+1}| \right\|_{\infty} \end{aligned}$$

Le terme de droite est une majoration uniforme de $|S - S_n|$ qui tend vers 0 par hypothèses (convergence uniforme de (a_n) vers 0 et de $\sum |a_k - a_{k+1}|$).

On a donc établi la convergence uniforme de $\sum u_n$

2. **Énoncé :** Soit (a_n) une suite de fonctions (à valeurs positives ou nulles) qui tend uniformément vers 0 en décroissant. Alors $\sum (-1)^n a_n$ converge uniformément.

Remarque : l'hypothèse (u_n) tend vers 0 en décroissant suffit à justifier que (u_n) est à valeurs positives ou nulles (limite monotone).

- Première preuve.

La suite (b_n) définie pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$ par $b_n(x) = (-1)^n$ vérifie :

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=0}^n b_k(x) \right| = \left| \sum_{k=0}^n (-1)^k \right| = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \leq 1$$

et la suite (a_n) vérifie :

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n |a_k(x) - a_{k+1}(x)| \underset{a_k - a_{k+1} \geq 0}{=} \sum_{k=0}^n (a_k(x) - a_{k+1}(x)) \underset{\text{télescopage}}{=} a_0(x) - a_{n+1}(x)$$

donc comme par hypothèse $(a_n) \rightarrow 0$ uniformément, $\sum |a_k - a_{k+1}|$ converge uniformément. Les hypothèses du critère d'Abel uniforme sont satisfaites,

$\sum (-1)^n a_n$ converge uniformément

- Deuxième preuve. Soit $x \in I$. Alors la série $\sum (-1)^n a_n(x)$ satisfait le critère spécial des séries alternées, en particulier la série $\sum (-1)^n a_n$ converge simplement et on dispose de la majoration du reste :

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, |R_n(x)| = \left| \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k a_k(x) \right| \leq |a_n(x)| \leq \|a_n\|_{\infty}$$

Par hypothèse $\|a_n\|_{\infty} \rightarrow 0$ donc le reste converge uniformément vers 0, donc

$\sum (-1)^n a_n$ converge uniformément

3. On considère $a_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{n}$ et $b_n : x \in I \mapsto e^{inx}$.

On observe que $\sum |a_n - a_{n+1}| = \sum \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$ converge uniformément (série télescopique, indépendante de $x \in \mathbb{R}$) sur \mathbb{R} et (a_n) converge vers 0 uniformément (indépendante de x).

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \neq 0 \pmod{2\pi}$ on calcule :

$$\left| \sum_{k=0}^n e^{ikx} \right| = \left| \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \right| = |e^{inx/2}| \frac{|\sin \frac{n+1}{2} x|}{|\sin \frac{x}{2}|} \leq \frac{1}{\sin(x/2)}$$

Ainsi pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$ et $[a, b] \subset]0, 2\pi[$ on dispose de la majoration uniforme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=0}^n e^{ikx} \right| \leq \frac{1}{\sin(a/2)} + \frac{1}{\sin(b/2)}$$

La règle d'Abel assure alors la convergence uniforme de la série sur tout segment de $]0, 2\pi[$ (et sur tous les segments équivalents modulo 2π).

En revanche :

il n'y a pas convergence uniforme sur un intervalle ayant un multiple de 2π dans son adhérence,

sinon par théorème de la double limite la série $\sum \frac{1}{n}$ converge, ce qui est absurde.

Remarque. La transformation d'Abel est l'analogue discret d'une intégration par parties, elle est souvent utile pour établir la convergence uniforme d'une série de fonctions lorsqu'il n'y a pas convergence normale (parfois la version «séries alternées» suffit).

Exercice 2.

1. On suppose par l'absurde que la convergence n'est pas uniforme :

$$\text{non } (\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon) \\ \iff \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n \geq N \text{ et } \exists x \in I, |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon \quad (\star)$$

- On construit par récurrence une suite strictement croissante d'entiers naturels $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et une suite d'éléments de I , $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| > \varepsilon$.
 - Pour $N = 0$ dans (\star) , on dispose de $n_0 \in \mathbb{N}$ et de $x_0 \in I$ tels que $|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| > \varepsilon$.
 - Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose avoir construit $n_0 < \dots < n_k \in \mathbb{N}$ et $x_0, \dots, x_k \in I$ tels que pour tout $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$, $|f_{n_i}(x_i) - f(x_i)| > \varepsilon$.
Pour $N = n_k + 1$ dans (\star) , on dispose de $n_{k+1} \in \mathbb{N}$, $n_{k+1} > n_k$ et de $x_{k+1} \in I$, tels que $|f_{n_{k+1}}(x_{k+1}) - f(x_{k+1})| > \varepsilon$.
- On a ainsi construit par récurrence une suite strictement croissante d'entiers naturels $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et une suite d'éléments de I , $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| > \varepsilon$.
- Quitte à ré-extraire (Bolzano-Weirstrass) on peut supposer que la suite (x_k) (bornée) converge vers un élément $x \in I$ (car $I = [a, b]$ est fermé).
Mais il n'est pas possible à ce stade de déterminer la limite de $f_{n_k}(x_k)$ sans un travail supplémentaire.
- Pour tout $x \in I$, la suite $(f_n(x))$ est croissante et convergente (par hypothèse) donc converge vers sa borne supérieure, si bien que pour tout $x \in I$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \leq f(x)$.
Soit alors $m \in \mathbb{N}$. On dispose de l'inégalité :

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq m, f(x_k) - f_m(x_k) \underset{n_k \geq k \geq m}{\geq} f(x_k) - f_{n_k}(x_k) = |f(x_k) - f_{n_k}(x_k)| > \varepsilon$$

puis par continuité de f_m et de f il vient par passage à la limite ($k \rightarrow +\infty$) : $f(x) - f_m(x) \geq \varepsilon$.
Ceci étant valable pour tout $m \in \mathbb{N}$, par passage à la limite ($m \rightarrow +\infty$) on a : $0 \geq \varepsilon > 0$, ce qui est absurde.

Finalement (f_n) converge uniformément vers f

2. • Comme f est continue sur le segment $I = [a, b]$, elle y est uniformément continue (Heine).
Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $x, x' \in I$, $|x - x'| \leq \eta \implies |f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$.
Soit alors $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{b-a}{p} \leq \eta$, on considère la subdivision régulière $x_0 = a < \dots < x_p = b$ de pas $\frac{b-a}{p}$ de I . En particulier pour tout $i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, $|f(x_i) - f(x_{i+1})| \leq \varepsilon$.
- Soit $x \in I$, il existe $i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ tel que $x_i \leq x \leq x_{i+1}$. Par croissance des f_n , il vient, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f_n(x_i) \leq f_n(x) \leq f_n(x_{i+1})$ (donc $-f_n(x_{i+1}) \leq -f_n(x) \leq -f_n(x_i)$).
Par ailleurs, par convergence simple de (f_n) , par passage à la limite ($n \rightarrow +\infty$) il vient : $f(x_i) \leq f(x) \leq f(x_{i+1})$.
Finalement on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x_i) - f_n(x_{i+1}) \leq f(x) - f_n(x) \leq f(x_{i+1}) - f_n(x_i)$.
 - Par convergence simple de (f_n) , pour tout $i \in \llbracket 0, p \rrbracket$, il existe $N_i \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_i$, $|f_n(x_i) - f(x_i)| \leq \varepsilon$.
En considérant $N = \max\{N_0, \dots, N_p\}$, pour tout $n \geq N$, pour tout $i \in \llbracket 0, p \rrbracket$, $|f_n(x_i) - f(x_i)| \leq \varepsilon$.
 - Ainsi, pour tout $n \geq N$, pour tout $i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$,

$$|f(x_i) - f_n(x_{i+1})| = |f(x_i) - f(x_{i+1}) + f(x_{i+1}) - f_n(x_{i+1})| \leq \underbrace{|f(x_i) - f(x_{i+1})|}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{|f(x_{i+1}) - f_n(x_{i+1})|}_{\leq \varepsilon} \leq 2\varepsilon$$

et de même : $|f(x_{i+1}) - f_n(x_i)| \leq 2\varepsilon$.

- Ainsi : $\forall n \geq N, \forall x \in I, -2\varepsilon \leq f(x) - f_n(x) \leq 2\varepsilon$.
On a donc démontré : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in I, |f(x) - f_n(x)| \leq 2\varepsilon$.
Autrement dit (f_n) converge uniformément vers f

Exercice 3.

1. Énoncé : soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose que $\sum a_n$ converge. Alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$.
Contre-exemple : soit $\sum (-1)^n x^n$, c'est une série entière de rayon de convergence 1 et de somme $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ où $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{2}$. Pourtant $\sum (-1)^n$ diverge.
2. (a) (ka_k) est une suite convergente, donc elle est bornée. Ainsi $\{|ka_k| \mid k \geq n\}$ est une partie non vide majorée de \mathbb{R} , elle admet une borne supérieure que l'on note M_n . En particulier $M_n \geq 0$.

Par ailleurs $ka_k \rightarrow 0$ donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N$, $|ka_k| \leq \varepsilon$ donc en particulier, pour tout $n \geq N$, pour tout $k \geq n$, $|ka_k| \leq \varepsilon$, donc $0 \leq M_n \leq \varepsilon$.

On a montré que $M_n \rightarrow 0$

- (b) On calcule pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \sum_{k=0}^n a_k \right| &= \left| \sum_{k=0}^n a_k (x^k - 1) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k \right| = \left| 0 + \sum_{k=1}^n \underbrace{a_k}_{=\frac{ka_k}{k}} (x^k - 1) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \underbrace{a_k}_{=\frac{ka_k}{k}} x^k \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |ka_k| \frac{1}{k} \underbrace{|x-1|}_{=1-x} \sum_{\ell=0}^{k-1} x^\ell + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{k}}_{\leq \frac{1}{n}} |ka_k| x^k \leq (1-x) \sum_{k=1}^n |ka_k| + \frac{1}{n} M_{n+1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k \\ &\quad = \frac{x^{n+1}}{1-x} \leq \frac{1}{1-x} \\ &\leq n(1-x) \frac{\sum_{k=1}^n |ka_k|}{n} + \frac{1}{n(1-x)} M_{n+1} \end{aligned}$$

- (c) En particulier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| f(1-1/n) - \sum_{k=0}^n a_k \right| \leq n \left((1 - (1-1/n)) \frac{\sum_{k=1}^n |ka_k|}{n} + \frac{1}{n(1 - (1-1/n))} M_{n+1} \right) = \frac{\sum_{k=1}^n |ka_k|}{n} + M_{n+1}$$

Or $\frac{\sum_{k=1}^n |ka_k|}{n} \rightarrow 0$ (Césaro sous l'hypothèse $ka_k \rightarrow 0$) et $M_{n+1} \rightarrow 0$.

Ainsi $f(1-1/n) - \sum_{k=0}^n a_k \rightarrow 0$ et comme par hypothèse $f(1-1/n) \rightarrow S$ (composition de limites), on en déduit que $\sum_{k=0}^n a_k \rightarrow S$.

On a donc démontré la convergence de $\sum a_n$ et établi : $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$