ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°49

Exercice 1 (*)

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum \operatorname{Arctan}(n) z^n$
2. $\sum \mathrm{e}^{(-1)^n} z^n$
3. $\sum \sqrt{n} z^n$
4. $\sum\limits_{n \geqslant 1} \ln(n) z^n$
5. $\sum \ln(1-\mathrm{e}^{-n}) z^n$
6. $\sum \ln(\operatorname{sh}(n)) z^n$

Corrigé : 1. On a $\operatorname{Arctan}(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{\pi}{2}$ d'où $\sum \operatorname{Arctan}(n) z^n$ de même rayon que $\sum z^n$ et par conséquent

$$\boxed{\mathrm{R}=1}$$

2. On a
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{e}^{-1} \leqslant \mathrm{e}^{(-1)^n} \leqslant \mathrm{e}$$

Notant R_1, R et R_2 les rayons respectifs de $\sum \mathrm{e}^{-1} z^n$, $\sum \mathrm{e}^{(-1)^n} z^n$ et $\sum \mathrm{e}\, z^n$, on a $\mathrm{R}_1 \geqslant \mathrm{R} \geqslant \mathrm{R}_2$ et par ailleurs, on a $\mathrm{R}_1 = \mathrm{R}_2 = 1$ d'où

$$\boxed{\mathrm{R}=1}$$

3. On a
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad 1 \leqslant \sqrt{n} \leqslant n$$

Notant R_1, R et R_2 les rayons respectifs de $\sum z^n$, $\sum \sqrt{n} z^n$ et $\sum n z^n$, on a $\mathrm{R}_1 \geqslant \mathrm{R} \geqslant \mathrm{R}_2$ et par ailleurs, on a $\mathrm{R}_1 = \mathrm{R}_2 = 1$ d'où

$$\boxed{\mathrm{R}=1}$$

4. On a
$$\forall n \in [\![3\,;+\infty]\!] \qquad 1 \leqslant \ln(n) \leqslant n-1 \leqslant n$$

la deuxième inégalité s'obtenant par concavité de ln. Notant R_1, R et R_2 les rayons respectifs de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{z^n}{n}$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln(n) z^n$ et $\sum z^n$, on a $\mathrm{R}_1 \geqslant \mathrm{R} \geqslant \mathrm{R}_2$ et par ailleurs, on a $\mathrm{R}_1 = \mathrm{R}_2 = 1$ d'où

$$\boxed{\mathrm{R}=1}$$

5. Pour $r > 0$, on a
$$\ln(1-\mathrm{e}^{-n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\mathrm{e}^{-n}$$

Les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln(1-\mathrm{e}^{-n}) z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathrm{e}^{-n} z^n$ ont même rayon de convergence et par suite

$$\boxed{\mathrm{R}=\mathrm{e}}$$

6. On a
$$\ln(\operatorname{sh}(n)) = \ln\left(\mathrm{e}^n \frac{1-\mathrm{e}^{-2n}}{2}\right) = n + \mathrm{O}(1) \underset{n\to+\infty}{\sim} n$$

Ainsi, les séries $\sum \ln(\operatorname{sh}(n)) z^n$ et $\sum n z^n$ ont même rayon de convergence d'où

$$\boxed{\mathrm{R}=1}$$

Exercice 2 (**)

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum \sin(\pi\sqrt{n^2+1})z^n$

2. $\sum \left(\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}\right) z^n$

3. $\sum \ln(n!)z^n$

4. $\sum \mathrm{e}^{-n} z^{n^2}$

5. $\sum \dfrac{z^{n^2}}{n!}$

6. $\sum \binom{2n}{n} z^{2n}$

Corrigé : 1. On a

$$\begin{aligned}\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) &= \sin\left(\pi n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right) = \sin\left(\pi n\left(1+\frac{1}{2n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\\ &= \sin\left(\pi n+\frac{\pi}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = (-1)^n\frac{\pi}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

D'où
$$\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^n\frac{\pi}{2n}$$

Ainsi, les séries $\sum \sin(\pi\sqrt{n^2+1})z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{z^n}{n}$ ont même rayon de convergence (le facteur $(-1)^n\dfrac{\pi}{2}$ n'influe pas sur le caractère borné) et par conséquent

$$\boxed{\mathrm{R}=1}$$

2. On a
$$\forall n\in\mathbb{N}^* \qquad 1\leqslant \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\leqslant n\sqrt{n}\leqslant n^2$$

Notant R_1, R et R_2 les rayons respectifs de $\sum z^n$, $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)z^n$ et $\sum nz^n$, on a $\mathrm{R}_1\geqslant\mathrm{R}\geqslant\mathrm{R}_2$ et par ailleurs, on a $\mathrm{R}_1=\mathrm{R}_2=1$ d'où

$$\boxed{\mathrm{R}=1}$$

3. On a
$$\forall n\in[\![3\,;+\infty[\![\qquad 1\leqslant \ln(n!)=\sum_{k=1}^{n}\ln(k)\leqslant n\ln(n)\leqslant n^2$$

Notant R_1, R et R_2 les rayons respectifs de $\sum z^n$, $\sum\ln(n!)z^n$ et $\sum n^2z^n$, on a $\mathrm{R}_1\geqslant\mathrm{R}\geqslant\mathrm{R}_2$ et par ailleurs, on a $\mathrm{R}_1=\mathrm{R}_2=1$ d'où

$$\boxed{\mathrm{R}=1}$$

4. Soit $r>0$. On a $\mathrm{e}^{-n}r^{n^2}=\exp(n^2\ln(r)-n)=\mathrm{O}(1)$ si et seulement si $r\leqslant 1$ d'où

$$\boxed{\mathrm{R}=1}$$

Variante : En $z=1$, on a $\sum\mathrm{e}^{-n}$ convergente d'où $\mathrm{R}\geqslant 1$.

5. Soit $r>0$ et $u_n=\dfrac{r^{n^2}}{n!}$. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{r^{2n+1}}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}\begin{cases}+\infty & \text{si r>1}\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

D'après le critère de d'Alembert, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement si $r>1$ et converge absolument si $r\leqslant 1$. On conclut

$$\boxed{\mathrm{R}=1}$$

6. Soit $r>0$ et $u_n=\binom{2n}{n}r^{2n}$. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2(2n+1)}{n+1}r^2\xrightarrow[n\to\infty]{}4r^2$$

On utilise ensuite le critère de d'Alembert. Si $4r^2 < 1$ ce qui équivaut à $r < 1/2$, la série converge absolument d'où $\mathrm{R} \geqslant 1/2$. Si $4r^2 > 1$ ce qui équivaut à $r > 1/2$, la série diverge grossièrement d'où $\mathrm{R} \leqslant 1/2$ et on conclut

$$\boxed{\mathrm{R} = \frac{1}{2}}$$

Exercice 3 (*)

Déterminer le rayon de convergence puis la somme des séries entières suivantes :

1. $\sum \dfrac{x^n}{n+1}$
2. $\sum n x^{2n}$
3. $\sum \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) x^n$

Corrigé : 1. On a $\dfrac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n}$ a même rayon de convergence que $\sum x^n$ d'où un rayon de convergence égal à 1. On pose

$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

d'où
$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad x\mathrm{S}(x) = -\ln(1-x)$$

Ainsi
$$\boxed{\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{S}(x) = \begin{cases} -\dfrac{\ln(1-x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}}$$

2. La série $\sum n x^{2n}$ a même rayon de convergence que $\sum x^{2n}$ géométrique de raison x^2 d'où un rayon de convergence égal à 1. On pose

$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n x^{2n} \quad \text{et} \quad \mathrm{T}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n$$

Par dérivation de série entière, on trouve

$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{T}(x) = x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right] = x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[\frac{1}{1-x}\right] = \frac{x}{(1-x)^2}$$

et on a
$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{S}(x) = \mathrm{T}(x^2)$$

Ainsi
$$\boxed{\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{S}(x) = \frac{x^2}{(1-x^2)^2}}$$

3. On a $1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} k \leqslant n^2$ pour $n \geqslant 1$. Notant R_1, R et R_2 les rayons de convergence respectifs de $\sum z^n$, $\sum \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) z^n$ et $\sum n^2 z^n$, on a $\mathrm{R}_1 \geqslant \mathrm{R} \geqslant \mathrm{R}_2$ et par ailleurs, on a $\mathrm{R}_1 = \mathrm{R}_2 = 1$ d'où $\mathrm{R} = 1$. Les séries entières $\sum n x^n$ et $\sum x^n$ ont un rayon de convergence égal à 1 et d'après le théorème du produit de Cauchy

$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} k\right) x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)$$

La somme $\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n$ pour $x \in \left]-1\,;1\right[$ a été obtenue à la question précédente et on conclut

$$\boxed{\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{S}(x) = \frac{x}{(1-x)^3}}$$

Exercice 4 (**)

Déterminer le rayon de convergence puis la somme des séries entières suivantes :

1. $\sum \operatorname{ch}(n) x^n$ 2. $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{x^n}{n^2-1}$ 3. $\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$ 4. $\sum \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\right) x^n$

Corrigé : 1. On a $\operatorname{ch}(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^n}{2}$ et on en déduit un rayon de convergence égal à e^{-1}. On pose

$$\forall x \in \left]-\mathrm{e}^{-1}\,;\mathrm{e}^{-1}\right[\qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{ch}(n) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\,n} + \mathrm{e}^{-n}}{2} x^n$$

Les séries entières $\sum \mathrm{e}^{\,n} x^n$ et $\sum \mathrm{e}^{-n} x^n$ ont pour rayons de convergence respectifs e^{-1} et e puisque pour $r \geqslant 0$

$$\mathrm{e}^{\,n} r^n = \mathrm{O}(1) \iff \mathrm{e}\, r \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^{-n} r^n = \mathrm{O}(1) \iff \mathrm{e}^{-1} r \leqslant 1$$

Par linéarité du symbole somme car convergence (absolue) sur $\left]-\mathrm{e}^{-1}\,;\mathrm{e}^{-1}\right[$, il vient

$$\forall x \in \left]-\mathrm{e}^{-1}\,;\mathrm{e}^{-1}\right[\qquad \mathrm{S}(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{\,n} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n} x^n\right)$$

Ainsi $$\boxed{\forall x \in \left]-\mathrm{e}^{-1}\,;\mathrm{e}^{-1}\right[\qquad \mathrm{S}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}\,x} + \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}x}\right)}$$

2. On a $$\frac{1}{n^2-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

donc les séries $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{x^n}{n^2-1}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n^2}$ ont même rayon de convergence et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n^2}$, $\sum x^n$ ont même rayon de convergence. On en déduit que le rayon de convergence est égal à 1. On note

$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}\left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right] x^n$$

Par des arguments sembables, les séries $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{x^n}{n-1}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{x^n}{n+1}$ ont un rayon de convergence égal à 1. Par linéarité car convergence, on trouve

$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{S}(x) = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}\right]$$

Puis $$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} = x\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} = -x\ln(1-x)$$

et $$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} - x - \frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{x}\left(-\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2}\right)$$

Ainsi $$\boxed{\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{S}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{1}{x} - x\right)\ln(1-x) + 1 + \dfrac{x}{2}\right] & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

3. On a $$\frac{(2n)!}{(2(n+1))!} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

d'où un rayon de convergence égal à $+\infty$. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$$

Pour $x \geqslant 0$, on a $\qquad \mathrm{S}(x) = \mathrm{S}\left(\sqrt{x}^2\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{x}\right)^{2n}}{(2n)!} = \mathrm{ch}\,\left(\sqrt{x}\right)$

Pour $x \leqslant 0$, on a $\quad \mathrm{S}(x) = \mathrm{S}\left(-\sqrt{-x}^2\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\left(\sqrt{-x}\right)^{2n}}{(2n)!} = \cos\left(\sqrt{-x}\right)$

Ainsi $\qquad \boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{S}(x) = \begin{cases} \mathrm{ch}\,\left(\sqrt{x}\right) & \text{si } x \geqslant 0 \\ \cos\left(\sqrt{-x}\right) & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}}$

4. On a $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad 1 \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant n$

Notant R_1, R et R_2 les rayons respectifs de $\sum z^n$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) z^n$ et $\sum n z^n$, on a $\mathrm{R}_1 \geqslant \mathrm{R} \geqslant \mathrm{R}_2$ et par ailleurs, on a $\mathrm{R}_1 = \mathrm{R}_2 = 1$ d'où $\mathrm{R} = 1$. Les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ et $\sum x^n$ ont un rayon de convergence égal à 1 et d'après le théorème du produit de Cauchy

$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)$$

Ainsi $\qquad \boxed{\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{S}(x) = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}}$

Exercice 5 (*)

Justifier que les fonctions suivantes se prolongent se prolongent en fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$:

1. $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ $\qquad$ 2. $x \mapsto \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ $\qquad$ 3. $x \mapsto \dfrac{\mathrm{th}\,(x)}{x}$

Corrigé : 1. On a

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

On pose $\qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \varphi(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$

Ainsi $\qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

Comme la fonction φ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, on conclut

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est le prolongement } \mathscr{C}^\infty \text{ de } x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}.}$$

2. On a $\quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \cos(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \iff 1 - \cos(x) = x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2(n-1)}}{(2n)!}$

On pose $\qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2(n-1)}}{(2n)!}$

Ainsi
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme la fonction φ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, on conclut

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est le prolongement } \mathscr{C}^\infty \text{ de } x \mapsto \frac{1-\cos(x)}{x^2}.}$$

3. On a
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

On pose
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

Ainsi
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction φ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, la fonction $1/\operatorname{ch}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme inverse d'une telle fonction dont le dénominateur ne s'annule. On conclut

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \times \frac{1}{\operatorname{ch}} \text{ est le prolongement } \mathscr{C}^\infty \text{ de } x \mapsto \frac{\operatorname{th}(x)}{x}.}$$

Exercice 6 (**)

Développer en série entière les fonctions suivantes et préciser les rayons de convergence :

1. $x \mapsto \cos(x)\cos(2x)$ 2. $x \mapsto \ln(x^2 - 5x + 6)$ 3. $x \mapsto \sin(x)\mathrm{e}^{\sqrt{3}x}$

Corrigé : 1. Par linéarisation, on a
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \cos(x)\cos(2x) = \frac{1}{2}\left[\cos(3x) + \cos(x)\right]$$

D'où
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \cos(x)\cos(2x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (9^n + 1) x^{2n}}$$

2. On a
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad x^2 - 5x + 6 = (2-x)(3-x)$$

Ainsi
$$\forall x \in \left]-2\,;2\right[\qquad \ln(x^2 - 5x + 6) = \ln(2-x) + \ln(3-x) = \ln(6) + \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right) + \ln\left(1 - \frac{x}{3}\right)$$

Et finalement
$$\boxed{\forall x \in \left]-2\,;2\right[\qquad \ln(x^2 - 5x + 6) = \ln(6) - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)\frac{x^n}{n}}$$

3. On a
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \sin(x)\mathrm{e}^{\sqrt{3}x} = \operatorname{Im}\left(\mathrm{e}^{\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)x}\right) = \operatorname{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^n x^n}{n!}\right)$$

et avec l'écriture trigonométrique $\sqrt{3}+\mathrm{i} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$, on obtient

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \sin(x)\mathrm{e}^{\sqrt{3}x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) x^n}{n!}}$$

Exercice 7 (**)

Montrer $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \int_0^1 \mathrm{Arctan}\,(t)\,\mathrm{d}t$$

En déduire la valeur de cette somme.

Corrigé : On considère la série entière $\sum \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}$. Elle a même rayon de convergence que sa série dérivée deux fois $\sum (-1)^n x^{2n}$. Or, pour $r \geqslant 0$, on a clairement $(-1)^n r^{2n} = \mathrm{O}(1)$ si et seulement $r \leqslant 1$ et on en déduit son rayon de convergence $\mathrm{R} = 1$. On pose

$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}$$

Par dérivation de séries entières, il vient

$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{S}'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad \mathrm{S}''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$$

Par intégration, on obtient

$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{S}'(x) = \mathrm{S}'(0) + \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \mathrm{Arctan}\,(x)$$

puis $$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{S}(x) = \mathrm{S}(0) + \int_0^x \mathrm{Arctan}\,(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{Arctan}\,(t)\,\mathrm{d}t$$

Avec $$\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

on en déduit la convergence absolue de $\sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$ par comparaison et critère de Riemann. D'après le théorème d'Abel radial, il s'ensuit

$$\mathrm{S}(x) \xrightarrow[x\to 1]{} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$$

Or, la fonction $x \mapsto \int_0^x \mathrm{Arctan}\,(t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}$ d'où

$$\int_0^x \mathrm{Arctan}\,(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 1]{} \int_0^1 \mathrm{Arctan}\,(t)\,\mathrm{d}t$$

On conclut $$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \int_0^1 \mathrm{Arctan}\, t\,\mathrm{d}t}$$

En intégrant par parties, il vient

$$\int_0^1 \mathrm{Arctan}\,(t)\,\mathrm{d}t = [t\,\mathrm{Arctan}\,(t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \mathrm{Arctan}\,(1) - \frac{1}{2}\left[\ln(1+t^2)\right]_0^1$$

Ainsi $$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}}$$

Exercice 8 (**)

On pose $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(k-1)!}{n!}$

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n\, x^n$. On pourra déterminer un encadrement simple de a_n.

   Par la suite, on note $\quad \forall x \in\,]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,[\qquad f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$

2. Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire (L) d'ordre un.
3. En déduire une écriture intégrale de f.

Corrigé : 1.Soit n entier non nul. On a

$$\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \leqslant a_n \leqslant n \times \frac{(n-1)!}{n!} = 1$$

Il s'ensuit $\qquad \boxed{\mathrm{R} = 1}$

2. Par dérivation d'une série entière, il vient pour $x \in\,]-1\,;1\,[$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(k-1)!}{(n-1)!}\right) x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^{n-1}$$

la linéarité étant justifiée car chacune des séries entières concernées admet un rayon de convergence égal à 1. Ainsi

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est solution de l'équation différentielle :} \quad y' - y = \frac{1}{1-x}.}$$

3. Par variation de la constante, on trouve

$$\boxed{\forall x \in\,]-1\,;1\,[\qquad f(x) = \mathrm{e}^x \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-t}\, \mathrm{d}t}$$

Exercice 9 (**)

On pose $\qquad \forall (n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \qquad \mathrm{S}_{n,k} = \mathrm{Card}\, \left\{ (i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n \mid \sum\limits_{j=1}^{n} i_j = k \right\}$

1. Préciser $\mathrm{S}_{1,k}$ puis justifier $\qquad \mathrm{S}_{n,k} = \sum\limits_{i=0}^{k} \mathrm{S}_{n-1,k-i}$
2. Déterminer un majorant simple de $\mathrm{S}_{n,k}$ et en déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum \mathrm{S}_{n,k}\, x^k$.
3. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathrm{S}_{1,k}\, x^k$, $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathrm{S}_{2,k}\, x^k$ puis conjecturer une formule pour $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathrm{S}_{n,k}\, x^k$ que l'on démontrera.
4. En déduire une expression de $\mathrm{S}_{n,k}$.

Corrigé : 1. On a $\qquad \mathrm{S}_{1,k} = \mathrm{Card}\, \{i_1 \in \mathbb{N} \mid i_1 = k\} = \{k\}$

D'où $\qquad \boxed{\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{S}_{1,k} = 1}$

Puis

$$\left\{(i_1,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}^n \mid \sum_{j=1}^{n} i_j = k\right\} = \bigsqcup_{i_n=0}^{k}\left\{(i_1,\ldots,i_{n-1},i_n),\ (i_1,\ldots,i_{n-1})\in\mathbb{N}^{n-1} \mid \sum_{j=1}^{n-1} i_j = k-i_n\right\}$$

Comme il s'agit d'une union disjointe, considérant les cardinaux, on trouve

$$\boxed{\mathrm{S}_{n,k} = \sum_{i=0}^{k}\mathrm{S}_{n-1,k-i}}$$

2. Soit $(i_1,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}^n$ tel que $\sum_{j=1}^{n} i_j = k$. On a donc

$$\forall j\in[\![\,1\,;\,n\,]\!]\qquad 0\leqslant i_j\leqslant k$$

d'où
$$\Lambda_{n,k} = \left\{(i_1,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}^n \mid \sum_{j=1}^{n} i_j = k\right\}\subset[\![\,0\,;\,k\,]\!]^n$$

Ainsi
$$\boxed{\mathrm{S}_{n,k}\leqslant \mathrm{Card}\,[\![\,0\,;\,k\,]\!]^n = (k+1)^n}$$

On a également $\mathrm{S}_{n,k}\geqslant 1$ puisque le n-uplet $(k,0,\ldots,0)$ appartient à $\Lambda_{n,k}$. On a donc

$$\forall k\in\mathbb{N}\qquad 1\leqslant \mathrm{S}_{n,k}\leqslant (k+1)^n$$

Notons R le rayon de convergence de $\sum \mathrm{S}_{n,k}\,x^k$, R_1 celui de $\sum x^k$ et R_2 celui de $\sum (k+1)^n\,x^k$.

On a
$$\forall k\in\mathbb{N}\qquad \mathrm{R}_1\geqslant \mathrm{R}\geqslant \mathrm{R}_2$$

Par ailleurs, on clairement $\mathrm{R}_1 = 1$ (série de référence) et l'équivalent $(k+1)^n \underset{k\to+\infty}{\sim} k^n$ fournit $\mathrm{R}_2 = 1$. On conclut

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de } \sum \mathrm{S}_{n,k}\,x^k \text{ est } \mathrm{R}=1.}$$

3. On a
$$\boxed{\forall x\in\,]-1\,;1\,[\qquad \sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{S}_{1,k}\,x^k = \sum_{k=0}^{+\infty}x^k = \frac{1}{1-x}}$$

Avec la relation établie à la première question, on a

$$\forall k\in\mathbb{N}\qquad \mathrm{S}_{2,k} = \sum_{i=0}^{k}\mathrm{S}_{1,k-i} = \sum_{i=0}^{k}1 = k+1$$

Par suite, avec un changement d'indice et par dérivation d'une série entière,

$$\forall x\in\,]-1\,;1\,[\qquad \sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{S}_{2,k}\,x^k = \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)x^k = \sum_{k=1}^{+\infty}k\,x^{k-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{k=0}^{+\infty}x^k\right]$$

D'où
$$\boxed{\forall x\in\,]-1\,;1\,[\qquad \sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{S}_{2,k}\,x^k = \frac{1}{(1-x)^2}}$$

On peut alors conjecturer la formule suivante

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\qquad \forall x\in\,]-1\,;1\,[\qquad \sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{S}_{n,k}\,x^k = \frac{1}{(1-x)^n}$$

Montrons ce résultat par récurrence. On pose

$$\mathscr{P}(n):\qquad \forall x\in\,]-1\,;1\,[\qquad \sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{S}_{n,k}\,x^k = \frac{1}{(1-x)^n}$$

• **Initialisation** $\mathscr{P}(1)$ **:** La propriété $\mathscr{P}(1)$ est vraie (voir ci-avant).

• **Hérédité** $\mathscr{P}(n-1) \Longrightarrow \mathscr{P}(n)$ **:** Supposons $\mathscr{P}(n-1)$ vraie pour $n-1 \geqslant 1$ fixé. Avec la relation admise dans l'énoncé, il vient

$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{S}_{n,k}\, x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} \mathrm{S}_{n-1,k-i} \right) x^k$$

D'après le théorème du produit de Cauchy appliqué aux séries entières $\sum x^k$ et $\sum \mathrm{S}_{n-1,k}\, x^k$ dont les rayons de convergences sont tous deux égaux à 1, il vient

$$\begin{aligned} \forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} \mathrm{S}_{n-1,k-i} \right) x^k &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k \right) \times \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{S}_{n-1,k}\, x^k \right) \\ &= \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{(1-x)^{n-1}} = \frac{1}{(1-x)^n} \end{aligned}$$

ce qui clôt la récurrence. On conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{S}_{n,k}\, x^k = \frac{1}{(1-x)^n}}$$

4. Par dérivation d'une série entière, on a pour $x \in \left]-1\,;1\right[$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}} \left[\frac{1}{1-x} \right] = \frac{(n-1)!}{(1-x)^n} &= \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}} \left[\sum_{k=0}^{+\infty} x^k \right] \\ &= \sum_{k=n-1}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-n+2) x^{k-(n-1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+n-1)!}{k!}\, x^k \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, on en déduit

$$\boxed{\forall (n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \qquad \mathrm{S}_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}}$$

Variante : On peut répondre à cette dernière question uniquement avec des arguments combinatoires. Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. On remarque

$$\mathrm{S}_{n,k} = \mathrm{Card} \left\{ (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n \mid \sum_{j=1}^{n} (i_j + 1) = k + n \right\}$$

L'intérêt de cette écriture est d'avoir des composantes toutes non nulles dans le n-uplet $(i_1 + 1, \dots, i_n + 1)$. En écrivant

$$n + k = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1 + 1}_{n+k \text{ termes}}$$

le problème équivaut à choisir $n-1$ signes $+$ parmi les $n+k-1$ signes $+$ afin d'isoler n paquets qui formeront le n-uplet

$$n + k = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{i_1+1} \oplus \underbrace{1 + \ldots + 1}_{i_2+1} \oplus \ \cdots \ \oplus \underbrace{1 + \ldots + 1}_{i_n+1}$$

On a donc $\binom{n+k-1}{n-1}$ choix possibles et on retrouve le résultat précédent.

Exercice 10 (**)

On pose $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\, \mathrm{d}t$$

1. Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

2. En déduire le développement en série entière de f.

3. Établir $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k} = \frac{4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$

Corrigé : 1. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ d'où le caractère $\mathscr{C}^1$ de $x \mapsto \int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$ et donc de f en tant que produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Par dérivation, il vient

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = -2xf(x) + \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{x^2}$$

Ainsi $\qquad \boxed{\text{La fonction } f \text{ est solution de l'équation différentielle } y' + 2xy = 1.}$

2. La fonction f est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' + 2xy = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Cherchons une solution développable en série entière $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x \in \,]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,[$ avec R qu'on suppose strictement positif. Par dérivation d'une série entière, on a

$$\forall x \in \,]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,[\qquad y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

On injecte les expressions dans l'équation différentielle :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n x^{n+1} = 1$$

Avec un changement d'indice dans la deuxième somme, il vient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=2}^{+\infty} 2a_{n-2} x^{n-1} = 1$$

Par linéarité du symbole somme dans l'intervalle de convergence, on obtient

$$a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} (n a_n + 2a_{n-2})\, x^{n-1} = 1$$

Par unicité du développement en série entière, on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n a_n + 2a_{n-2} = 0$$

La condition initiale $f(0) = 0$ équivaut à $a_0 = 0$. Par récurrence immédiate, on a $a_{2n} = 0$ et $a_{2n+1} \neq 0$ pour tout n entier. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_{2n+1} = \prod_{k=1}^{n} \frac{a_{2k+1}}{a_{2k-1}} = \prod_{k=1}^{n} \frac{-2}{2k+1} = (-2)^n \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{(2k+1)2k} = (-1)^n 4^n \frac{n!}{(2n+1)!}$$

Vérifions que le rayon de convergence de $\sum a_n x^n = \sum a_{2n+1} x^{2n+1}$ est non nul. On pose $u_n = |a_{2n+1}|\, r^{2n+1}$ pour $r > 0$. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2r^2}{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

On utilise le critère de d'Alembert. La série converge absolument pour tout $r \geqslant 0$ d'où $\mathrm{R} = +\infty$. D'après l'unicité du théorème de Cauchy linéaire, on conclut

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{4^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}}$$

3. Avec le développement usuel $\mathrm{e}^{u} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$ pour u réel, il vient par intégration d'une série entière

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}\right) \left(\int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{n!}\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x \frac{t^{2n}}{n!}\,\mathrm{d}t\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}\right)\end{aligned}$$

Soit x réel. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$$

Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument et d'après le théorème du produit de Cauchy (pour des séries numériques)

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!} \frac{x^{2(n-k)+1}}{(2(n-k)+1)(n-k)!}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\binom{n}{k}}{(2(n-k)+1)}\right) x^{2n+1}\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\binom{n}{k}}{2(n-k)+1} = (-1)^n \frac{4^n n!}{(2n+1)!}$$

Avec un changement d'indice et en multipliant à droite et à gauche par $(-1)^n$, on conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} = \frac{4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}}}$$

Remarque : On peut obtenir ce résultat de manière naïve. Soit n entier. On a

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \int_0^1 (-t^2)^k\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t^2)^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n\,\mathrm{d}t$$

Notant $\mathrm{I}_{m,n} = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-t)^m (1+t)^n\,\mathrm{d}t$ pour $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, on peut déterminer une relation entre $\mathrm{I}_{m,n}$ et $\mathrm{I}_{m+1,n-1}$ en intégrant par parties puis en déduire $\mathrm{I}_{n,n}$.