Feuille d'exercices n°50

Exercice 1 (**)

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum n\mathrm{e}^{(-1)^n} z^n$
2. $\sum\limits_{n\geqslant 1} n^{\ln(n)} z^n$
3. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} z^n$
4. $\sum \left(\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}\right) z^n$
5. $\sum \left(\displaystyle\int_0^1 (1+t^2)^n \,\mathrm{d}t\right) z^n$
6. $\sum 2^n z^{n^2}$

Corrigé : 1. Les séries $\sum n\mathrm{e}^{(-1)^n} z^n$ et $\sum \mathrm{e}^{(-1)^n} z^n$ ont même rayon de convergence. Par ailleurs, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{e}^{-1} \leqslant \mathrm{e}^{(-1)^n} \leqslant \mathrm{e}$$

On conclut $\boxed{\mathrm{R}=1}$

2. Soit $r>0$. On a

$$n^{\ln n} r^n = \exp\left(n\ln(r) + \ln(n)^2\right) = \exp\left(n\left(\ln(r) + \mathrm{o}(1)\right)\right)$$

Si $r<1$, on a $n^{\ln(n)} r^n = \mathrm{o}(1)$ et si $r>1$, alors $n^{\ln(n)} r^n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Ainsi, on a

$$r<1 \quad\Longrightarrow\quad r\leqslant \mathrm{R} \quad \text{et} \quad r>1 \quad\Longrightarrow\quad r\geqslant \mathrm{R}$$

On conclut $\boxed{\mathrm{R}=1}$

3. Pour n entier non nul et $r>0$, notons $u_n = \left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} r^n$, autrement dit

$$u_n = \exp\left(n^2 \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) + n\ln(r)\right)$$

Avec le développement $\qquad \ln(1+u) = u + \mathrm{O}(u^2)$

on obtient

$$u_n = \exp\left(n^2\left(\frac{(-1)^n}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + n\ln(r)\right) = \exp\left(n\left((-1)^n + \ln(r) + \mathrm{o}(1)\right)\right)$$

On ne peut pas conclure directement sur le caractère borné ou non de la suite $(u_n)_n$ à cause de la présence du terme $(-1)^n$. Les entiers pairs et impairs forment une partition de $\mathbb{N}$ d'où

$$(u_n)_n \text{ bornée} \iff (u_{2n})_n \text{ et } (u_{2n+1})_n \text{ bornées}$$

Considérons alors les suites extraites d'indices pairs et impairs. On a

$$u_{2n} = \exp\left(n\left(1+\ln(r)+\mathrm{o}(1)\right)\right)$$

Puis $\qquad r<\mathrm{e}^{-1} \quad\Longrightarrow\quad n\left(1+\ln(r)+\mathrm{o}(1)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty \quad\Longrightarrow\quad (u_{2n})_n$ bornée

Et $\qquad u_{2n+1} = \exp\left(n\left(-1+\ln(r)+\mathrm{o}(1)\right)\right)$

d'où $\qquad r<\mathrm{e}^{-1}<\mathrm{e} \quad\Longrightarrow\quad n\left(-1+\ln(r)+\mathrm{o}(1)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty \quad\Longrightarrow\quad (u_{2n+1})_n$ bornée

Ainsi $$r < \mathrm{e}^{-1} \implies r \leqslant \mathrm{R}$$
autrement dit $[\,0\,;\mathrm{e}^{-1}\,[\subset [\,0\,;\mathrm{R}\,]$ et passant à la borne supérieure, on trouve $\mathrm{R} \geqslant \mathrm{e}^{-1}$. Par ailleurs
$$\begin{aligned} r > \mathrm{e}^{-1} &\implies n\,(1+\ln(r)+\mathrm{o}(1)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \\ &\implies (u_{2n})_n \text{ non bornée} \implies (u_n)_n \text{ non bornée} \end{aligned}$$

On a donc $$r > \mathrm{e}^{-1} \implies r \geqslant \mathrm{R}$$
autrement dit $]\,\mathrm{e}^{-1}\,;+\infty\,[\subset [\,\mathrm{R}\,;+\infty\,[$ et passant à la borne inférieure, on trouve $\mathrm{e}^{-1} \geqslant \mathrm{R}$. Ainsi
$$\boxed{\mathrm{R} = \mathrm{e}^{-1}}$$

4. On a $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{1}{2} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+1} \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n} \leqslant \int_0^1 \mathrm{d}t = 1$$

Ainsi $$\boxed{\mathrm{R} = 1}$$

5. Pour $t \in [\,0\,;1\,]$, on a $$0 \leqslant 2t \leqslant 1+t^2 \leqslant 2$$
l'inégalité de gauche résultant de $(1-t)^2 \geqslant 0$. Par croissance de la fonction puissance sur $\mathbb{R}_+$ puis intégration, il vient
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 2^n \int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t = \frac{2^n}{n+1} \leqslant \int_0^1 (1+t^2)^n \,\mathrm{d}t \leqslant 2^n$$
Notons R_1 le rayon de convergence de $\sum \dfrac{2^n}{n+1}\, z^n$, R_2 celui de $\sum 2^n\, z^n$ et R celui de la série entière étudiée. Comme $\dfrac{2^n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2^n}{n}$, les séries entières $\sum \dfrac{2^n}{n+1}\, z^n$ et $\sum 2^n\, z^n$ ont même rayon de convergence et $\sum 2^n\, z^n$ est une série géométrique d'où pour $r \geqslant 0$
$$\left((2r)^n\right)_n \text{ bornée} \iff 2r \leqslant 1 \iff r \leqslant \frac{1}{2}$$
donc son rayon est égal à $1/2$. Comme on a $\mathrm{R}_2 \leqslant \mathrm{R} \leqslant \mathrm{R}_1$, on conclut
$$\boxed{\mathrm{R} = \frac{1}{2}}$$
Remarque : On a utilisé la minoration que $2t \leqslant 1+t^2$ qui est fine au voisinage de 1 (l'inégalité est une égalité), là où se concentre le plus la « masse » de l'intégrale.

6. Soit $r > 0$. On a
$$2^n r^{n^2} = \exp\left(n^2 \ln(r) + n\ln(2)\right) = \exp\left(n^2\left(\ln(r) + \mathrm{o}(1)\right)\right)$$
On a $$r > 1 \implies 2^n r^{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \quad \text{et} \quad r < 1 \implies 2^n r^{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
Ainsi $$r > 1 \implies r \geqslant \mathrm{R} \quad \text{et} \quad r < 1 \implies r \leqslant \mathrm{R}$$
ce qui prouve respectivement $1 \leqslant \mathrm{R}$ et $1 \geqslant \mathrm{R}$ et on conclut
$$\boxed{\mathrm{R} = 1}$$

Exercice 2 (**)

Soit f développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et $(x_n)_n \in (\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}}$ vérifiant $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $f(x_n) = 0$ pour tout n entier. Montrer que f est nulle.

Corrigé : Soit $(a_k)_k \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ pour x réel. On suppose les a_n non tous nuls et on pose $\ell = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \sum_{n=\ell}^{+\infty} a_n x^n = x^\ell g(x) \quad \text{avec} \quad g(x) = \sum_{k=\ell}^{+\infty} a_k x^{k-\ell}$$

et $f(x_n) = x_n^\ell g(x_n) = 0$ pour n entier d'où $g(x_n) = 0$. La fonction g est développable en série entière donc continue en 0. Par conséquent, il vient

$$g(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(0) = a_\ell = 0$$

ce qui est absurde. On conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est nulle.}}$$

Remarque : Ce résultat est intitulé *principe des zéros isolés.*

Exercice 3 (**)

Montrer les égalités :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(\operatorname{th}(t))\,\mathrm{d}t = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$
2. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\operatorname{Arctan}(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$
3. $\displaystyle\int_0^{1} \ln(t)\ln(1-t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$
4. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^t} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$

Corrigé : 1. On a

$$\begin{aligned}\forall t > 0 \qquad \ln(\operatorname{th}(t)) &= \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-2t}\right) - \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-2t}\right)\\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - (-1)^n)\frac{\mathrm{e}^{-2nt}}{n} = -\sum_{n=0}^{+\infty} 2\frac{\mathrm{e}^{-2(2n+1)t}}{2n+1}\end{aligned}$$

La série $\sum \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2\left|\mathrm{e}^{-2(2n+1)t}\right|}{2n+1}\,\mathrm{d}t = \sum \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge. Ainsi par intégration terme à terme, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(\operatorname{th}(t))\,\mathrm{d}t$ converge avec

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \ln(\operatorname{th}(t))\,\mathrm{d}t = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}}$$

2. Par intégration de série entière, il vient

$$\forall t \in \left]-1\,;1\right[\qquad \operatorname{Arctan}(t) - \operatorname{Arctan}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$$

On pose
$$\forall t \in \left]-1\,;1\right[\qquad \varphi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{2n+1}$$

On a $$\forall t \in \left]-1\,;1\right[\qquad \varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{Arctan}(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction φ est développable en série entière sur $\left]-1\,;1\right[$ donc prolonge continument $t \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan}(t)}{t}$ en 0 et par intégration d'une série entière

$$\forall x \in \left[0\,;1\right[\qquad \int_0^x \frac{\operatorname{Arctan}(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan}(t)}{t}$ prolongée en 0 devient continue sur $\mathbb{R}$ sans difficulté d'où

$$\int_0^x \frac{\operatorname{Arctan}(t)}{t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 1]{} \int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan}(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

On a $$\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

d'où la convergence de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$ par comparaison et critère de Riemann. D'après le théorème d'Abel radial, il vient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2} \xrightarrow[x\to 1]{} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

On conclut $$\boxed{\int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan}(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}}$$

3. On a $$\forall t \in \left]0\,;1\right[\qquad \ln(t)\ln(1-t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n \ln(t)}{n}$$

Pour n entier non nul, on a $t^n \ln(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ d'où l'intégrabilité de $t \mapsto t^n \ln(t)$ sur $\left]0\,;1\right[$ (faussement impropre en 1 et en intégrant par partie, le crochet étant fini

$$\int_0^1 t^n \ln(t)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\left[\frac{t^{n+1}\ln(t)}{n+1}\right]_0^1}_{=0} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{(n+1)^2}$$

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \int_0^1 \left|\frac{t^n \ln(t)}{n}\right|\,\mathrm{d}t = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)^2}$ converge. Ainsi, par intégration terme à terme, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\ln(1-t)\,\mathrm{d}t$ converge avec

$$\boxed{\int_0^1 \ln(t)\ln(1-t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}}$$

4. On a $$\forall t \in \left]0\,;1\right] \qquad \frac{1}{t^t} = \mathrm{e}^{-t\ln(t)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(t\ln(t))^n}{n!}$$

On pose $$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2 \qquad \mathrm{I}_{n,m} = \int_0^1 t^n \ln(t)^m\,\mathrm{d}t$$

Soit $(m,n)\in\mathbb{N}^2$. On a $t^n\ln(t)^m \underset{t\to 0}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ d'où la convergence de $\mathrm{I}_{m,n}$. Pour m entier non nul, les fonctions $t\mapsto \dfrac{t^{n+1}}{n+1}$ et $t\mapsto \ln(t)^m$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ avec

$$\frac{t^{n+1}\ln(t)^m}{n+1}\xrightarrow[t\to 0]{}0\quad\text{et}\quad\frac{t^{n+1}\ln(t)^m}{n+1}\xrightarrow[t\to 1]{}0$$

on obtient en intégrant par parties

$$\mathrm{I}_{n,m}=\underbrace{\left[\frac{t^{n+1}\ln(t)^m}{n+1}\right]_0^1}_{=0}-\frac{m}{n+1}\int_0^1 t^n\ln(t)^{m-1}\,\mathrm{d}t=-\frac{m}{n+1}\mathrm{I}_{n,m-1}$$

Par récurrence immédiate, il vient

$$\forall (n,m)\in\mathbb{N}^2\qquad \mathrm{I}_{n,m}=(-1)^m\frac{m!}{(n+1)^m}\mathrm{I}_{n,0}=(-1)^m\frac{m!}{(n+1)^{m+1}}$$

En particulier $\qquad \forall n\in\mathbb{N}\qquad \displaystyle\int_0^1 (t\ln(t))^n\,\mathrm{d}t=(-1)^n\frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$

La série $\displaystyle\sum\int_0^1\left|\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1(t\ln(t))^n\,\mathrm{d}t\right|=\sum\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ converge. Ainsi, par intégration terme à terme, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t^t}$ converge avec

$$\boxed{\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t^t}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^{n+1}}}$$

Exercice 4 (***)

1. Déterminer le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$. On note S sa somme.
2. Déterminer de deux manière différentes $\displaystyle\lim_{x\to 1}\mathrm{S}(x)$.
3. Déterminer un équivalent de $\mathrm{S}(x)$ pour $x\to 1$.

Corrigé : 1. Avec $\dfrac{1}{n}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{n}}\leqslant 1$ pour n entier non nul, on trouve que le rayon de convergence de la série entière définissant S est

$$\boxed{\mathrm{R}=1}$$

2. On pose $\qquad \forall x\in\,]-1\,;1\,[\qquad \mathrm{S}(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$

Par comparaison, les séries concernées étant convergentes, on obtient

$$\forall x\in[\,0\,;1\,[\qquad \mathrm{S}(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}\geqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$$

Par comparaison, il vient $\qquad \mathrm{S}(x)\xrightarrow[x\to 1^-]{}+\infty$

On peut aussi observer que S est croissante sur $[\,0\,;1\,[$ en tant que somme de fonctions croissantes. Par limite monotone, la fonction S admet une limite éventuellement infinie en 1. Pour N entier non nul, on a

$$\forall x \in [\,0\,;1\,[\qquad \mathrm{S}(x) \geqslant \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

d'où
$$\lim_{x\to 1^{-1}} \mathrm{S}(x) \geqslant \lim_{x\to 1} \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{x^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Or, on a $\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} +\infty$ et par comparaison, on retrouve

$$\boxed{\mathrm{S}(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty}$$

3. Pour $x \in \,]\,0\,;1\,[$ fixé, on obtient par comparaison série/intégrale pour la fonction $t \mapsto \frac{x^t}{\sqrt{t}}$ continue par morceaux, décroissante et positive et intégrable sur $]\,0\,;1\,]$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{S}(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

l'intégrale et la série étant de même nature donc convergentes. Avec le changement de variables $t = u^2$, il vient

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2|\ln(x)|}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{\sqrt{-\ln(x)}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-v^2}\,\mathrm{d}v \underset{x\to 1}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{1-x}}$$

Puis, on a
$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \underset{x\to 1}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)$$

On conclut
$$\boxed{\mathrm{S}(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{1-x}}}$$

Exercice 5 (***)

Déterminer le rayon de convergence puis la somme des séries entières suivantes :

1. $\sum \frac{x^n}{2n+1}$
2. $\sum \frac{x^{3n}}{(2n)!}$
3. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(n)}{n} x^n$

Corrigé : 1. On a
$$\frac{1}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$$

donc par théorème, les séries $\sum \frac{x^n}{2n+1}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{2n}$ ont même rayon de convergence et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ et $\sum x^n$ ont même rayon de convergence. On en déduit que le rayon de convergence est égal à 1. On note

$$\forall x \in \,]-1\,;1\,[\qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$$

D'où
$$\forall x \in [\,0\,;1\,[\qquad \mathrm{S}(x) = \mathrm{S}\left((\sqrt{x})^2\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{2n+1}$$

et
$$\forall x \in \,]-1\,;0\,] \qquad \mathrm{S}(x) = \mathrm{S}\left(-(\sqrt{-x})^2\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(\sqrt{-x})^{2n}}{2n+1}$$

Posons $\qquad \forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{T}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n}}{2n+1} \quad \text{et} \quad \mathrm{U}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}$

Par dérivation de série entière, on trouve après ré-intégration

$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\smallsetminus \{0\} \qquad \mathrm{T}(x) = \frac{1}{2x}\ln\left(\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{U}(x) = \frac{\mathrm{Arctan}\,(x)}{x}$$

Finalement $\qquad \boxed{\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{S}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left(\left|\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right|\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\mathrm{Arctan}\,(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}} & \text{si } x < 0 \end{cases}}$

2. Soit $r > 0$. On pose $u_n = \dfrac{r^{3n}}{(2n)!}$ pour n entier. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{r^3}{(2n+2)(2n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Ainsi, la série $\sum u_n$ converge absolument pour tout $r > 0$ et on en déduit

$$\boxed{\mathrm{R} = +\infty}$$

On pose $\qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{3n}}{(2n)!}$

Il vient $\qquad \forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{3n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^3}\right)^{2n}}{(2n)!} = \mathrm{ch}\,\left(\sqrt{x^3}\right)$

et $\qquad \forall x \leqslant 0 \qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n(-x^3)^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n\left(\sqrt{-x^3}\right)^{2n}}{(2n)!} = \cos\left(\sqrt{-x^3}\right)$

Ainsi $\qquad \boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{S}(x) = \begin{cases} \mathrm{ch}\,\left(\sqrt{x^3}\right) & \text{si } x \geqslant 0 \\ \cos\sqrt{-x^3} & \text{sinon} \end{cases}}$

3. La série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{\sin(n)}{n} x^n$ a même rayon de convergence que $\sum \sin(n)x^n$. On a $\sin(n) = \mathrm{O}(1)$ d'où un rayon de convergence $\mathrm{R} \geqslant 1$. Supposons $\sin(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Alors, on aurait

$$\cos^2(n) = 1 - \sin^2(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad \sin(n+1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

d'où $\sin^2(n+1) = (\sin(n)\cos(1) + \sin(1)\cos(n))^2 = \sin(1)^2\cos(n)^2 + \mathrm{o}(1) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sin(1)^2 \neq 0$

ce qui est absurde. Comme $\sin(n) \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, la série $\sum \sin(n)$ diverge grossièrement ce qui prouve $\mathrm{R} \leqslant 1$ et par conséquent $\mathrm{R} = 1$. On pose

$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} x^n$$

Par dérivation d'une série entière, on trouve pour $x \in \left]-1\,;1\right[$

$$\mathrm{S}'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(n) x^{n-1}$$

puis $$x\mathrm{S}'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(n) x^n$$

La série $\sum \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}} x\right)^n$ a pour rayon de convergence 1 et par suite

$$x\mathrm{S}'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}\ \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}} x\right)^n = \mathrm{Im}\ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}} x\right)^n\right) = \mathrm{Im}\ \left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}} x}{x^2 - 2x\cos(1) + 1}\right) = \frac{x\sin(1)}{x^2 - 2x\cos(1) + 1}$$

On en déduit $$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{S}'(x) = \frac{\sin(1)}{x^2 - 2x\cos(1) + 1}$$

l'égalité valant également pour $x = 0$. Par suite pour $x \in \left]-1\,;1\right[$

$$\mathrm{S}(x) - \mathrm{S}(0) = \int_0^x \mathrm{S}'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\sin(1)}{(t-\cos(1))^2 + \sin(1)^2}\,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{Arctan}\left(\frac{t-\cos(1)}{\sin(1)}\right)\right]_0^x$$

On conclut, en utilisant la relation $\mathrm{Arctan}\,(u) + \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{u}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ pour $u > 0$,

$$\boxed{\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} x^n = \mathrm{Arctan}\left(\frac{x-\cos(1)}{\sin(1)}\right) + \frac{\pi}{2} - 1}$$

Exercice 6 (***)

On pose $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{W}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^n\,\mathrm{d}t$$

Déterminer le rayon de convergence puis la somme de $\sum \mathrm{W}_n x^n$.

Corrigé : On peut trouver l'équivalent de $\mathrm{W}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ avec le procédé classique. On peut aussi utiliser l'égalité $\mathrm{W}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n\,\mathrm{d}t$ pour n entier (changement $u = \dfrac{\pi}{2} - t$) puis l'encadrement

$$\forall t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right] \qquad \frac{2}{\pi} t \leqslant \sin(t) \leqslant 1$$

qui donne $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{\pi}{2(n+1)} \leqslant \mathrm{W}_n \leqslant \frac{\pi}{2}$$

On trouve $$\boxed{\mathrm{R} = 1}$$

Pour $x \in \left]-1\,;1\right[$, la série $\sum \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |(\cos(t)^n)\, x^n|\ \mathrm{d}t = \sum \mathrm{W}_n\,|x|^n$ converge d'où, par intégration terme à terme

$$\mathrm{S}(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} (x\cos(t))^n\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\cos(t)}$$

On effectue le changement de variable $u = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$. Soit $\varphi : \left]0\,;1\right[\to \left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[, u \mapsto 2\,\mathrm{Arctan}\,u$ fonction de classe $\mathscr{C}^1$, bijective, strictement croissante. On obtient par convergence et donc égalité des intégrales concernées

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\cos(t)} = \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}u}{1 - x + (1+x)u^2}$$

Puis $$\int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}u}{1-x+(1+x)u^2} = \frac{2}{1+x}\left[\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\mathrm{Arctan}\left(u\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)\right]_0^1$$

On conclut $$\boxed{\forall x \in\,]-1\,;1\,[\qquad \mathrm{S}(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)}$$

Variantes : (a) Pour le rayon de convergence, avec $\mathrm{W}_n = \mathrm{O}(1)$, on a $\mathrm{R} \geqslant 1$. Montrons que $\sum \mathrm{W}_n$ diverge, c'est-à-dire $\sum \mathrm{W}_n\, x^n$ diverge en $x = 1$. Si la série converge, alors on peut intégrer terme à terme puisque $\sum \mathrm{W}_n = \sum \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(t)^n|\,\mathrm{d}t$ converge et il vient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^n\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(t)^n\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1-\cos(t)}$$

ce qui est absurde puisque $1-\cos(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^2}{2}$ d'où la divergence de l'intégrale. On en déduit la divergence de $\sum \mathrm{W}_n\, x^n$ pour $x = 1$ d'où $\mathrm{R} \leqslant 1$ et on conclut $\mathrm{R} = 1$.

(b) On peut obtenir la somme par un procédé différent. Par intégration par parties, on obtient la relation classique

$$\forall n \geqslant 2 \qquad n\mathrm{W}_n = (n-1)\mathrm{W}_{n-2}$$

Par dérivation de série entière, il vient pour $x \in\,]-1\,;1\,[$

$$\begin{aligned}\mathrm{S}'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathrm{W}_n x^{n-1} = \mathrm{W}_1 + \sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)\mathrm{W}_{n-2}x^{n-1}\\ &= 1 + x\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\mathrm{W}_n x^n = 1 + x(\mathrm{S}(x) + x\mathrm{S}'(x))\end{aligned}$$

par linéarité du symbole somme en utilisant le fait qu'une série entière et sa série dérivée ont même rayon de convergence. Ainsi, la fonction somme est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases}(1-x^2)y'(x) &= 1 + xy(x)\\ y(0) &= \dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

Par variation de la constante, on trouve

$$\forall x \in\,]-1\,;1\,[\qquad y(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{\pi}{2} + \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}\right) = \frac{\pi/2 + \mathrm{Arcsin}\,(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

D'après l'unicité du théorème de Cauchy linéaire, on conclut

$$\forall x \in\,]-1\,;1\,[\qquad \mathrm{S}(x) = \frac{\pi/2 + \mathrm{Arcsin}\,(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

On peut vérifier qu'il y a coïncidence avec l'expression précédemment trouvée.

Exercice 7 (**)

Soit n entier. Un *dérangement* est une permutation de $[\![1\,;n]\!]$ sans point fixe. On note D_n le nombre de dérangements de $[\![1\,;n]\!]$ avec $\mathrm{D}_0 = 1$ pour convention.

1. Justifier $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\mathrm{D}_{n-k}$$

2. Montrer que le rayon de convergence n'est pas nul puis déterminer la somme de la série entière $\sum \dfrac{\mathrm{D}_n}{n!} x^n$.

3. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\mathrm{D}_n}{n!}$.

Corrigé : 1. On note $\mathrm{F}_{n,k}$ l'ensemble des permutations de $[\![1\,;\, n]\!]$ ayant k points fixes. La famille $(\mathrm{F}_{n,k})_{k \in [\![0\,;\, n]\!]}$ est une partition de S_n d'où

$$|\mathrm{S}_n| = \sum_{k=0}^{n} |\mathrm{F}_{n,k}| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |\mathrm{F}_{n-k,0}|$$

Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{D}_{n-k}}$$

2. On a $\mathrm{D}_n \leqslant |\mathrm{S}_n| = n!$ pour n entier d'où $\boxed{\mathrm{R} \geqslant 1}$

Les séries entières $\sum \dfrac{\mathrm{D}_n}{n!} x^n$ et $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ ont pour rayons de convergence respectifs $\mathrm{R} \geqslant 1$ et $+\infty$ et d'après le théorème du produit de Cauchy, on en déduit

$$\forall x \in \,]-1\,;1[\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{D}_{n-k}}{k!(n-k)!} \right) x^n = \mathrm{e}^x \mathrm{S}(x)$$

D'où

$$\boxed{\forall x \in \,]-1\,;1[\qquad \mathrm{S}(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x}}$$

3. D'après le théorème du produit de Cauchy pour les séries entières, il vient

$$\forall x \in \,]-1\,;1[\qquad \mathrm{S}(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right) x^n$$

D'après l'unicité du développement en série entière, on trouve

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{\mathrm{D}_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}}$$

On conclut

$$\boxed{\frac{\mathrm{D}_n}{n!} \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathrm{e}^{-1}}$$

Remarque : Pour n entier, on pose $\mathrm{A}_k = \{\sigma \in \mathrm{S}_n \mid \sigma(k) = k\}$. On a

$$\mathrm{S}_{n,0} = \mathrm{S}_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k$$

D'après la formule du crible (hors-programme), on sait

$$\operatorname{Card} \bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \operatorname{Card} \bigcap_{j=1}^{k} \mathrm{A}_{i_j}$$

d'où

$$\operatorname{Card} \bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} (n-k)! = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)!$$

Ainsi, on retrouve

$$\frac{\mathrm{D}_n}{n!} = \frac{\operatorname{Card} \mathrm{S}_{n,0}}{n!} = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Exercice 8 (***)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$. Déterminer les rayons de convergence des séries entières :

1. $\sum a_n^2 z^n$ 2. $\sum \dfrac{a_n}{n!} z^n$ 3. $\sum \dfrac{n!\,a_n}{n^n} z^n$

Corrigé : 1. Soit $r \geqslant 0$. On a

$$a_n^2 r^n = \mathrm{O}(1) \iff a_n \left(\sqrt{r}\right)^n = \mathrm{O}(1)$$

et $$\sqrt{r} < \mathrm{R} \implies a_n \left(\sqrt{r}\right)^n = \mathrm{O}(1) \quad \text{et} \quad \sqrt{r} > \mathrm{R} \implies a_n \left(\sqrt{r}\right)^n \neq \mathrm{O}(1)$$

On obtient $$\boxed{\mathrm{R}_1 = \mathrm{R}^2}$$

2. Soit $r \geqslant 0$ et $\lambda \in \,]\,0\,;\mathrm{R}\,[$. On a

$$\frac{a_n}{n!} r^n = a_n \lambda^n \times \frac{1}{n!}\left(\frac{r}{\lambda}\right)^n = \mathrm{O}(1) \times \mathrm{o}(1) = \mathrm{o}(1)$$

et ceci vaut pour tout $r \geqslant 0$. On conclut

$$\boxed{\mathrm{R}_2 = +\infty}$$

3. Avec l'équivalent de Stirling, on trouve

$$\frac{n! a_n}{n^n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\, a_n \mathrm{e}^{-n}$$

L'encadrement $1 \leqslant \sqrt{n} \leqslant n$ permet d'affirmer que les séries entières $\sum \dfrac{n!}{n^n} a_n z^n$ et $\sum a_n \left(\dfrac{z}{\mathrm{e}}\right)^n$ ont même rayon de convergence. Enfin, pour $r \geqslant 0$, on a

$$r < \mathrm{Re} \implies a_n \left(\frac{r}{\mathrm{e}}\right)^n = \mathrm{O}(1) \implies r \leqslant \mathrm{R}_3$$

et $$r > \mathrm{Re} \implies a_n \left(\frac{r}{\mathrm{e}}\right)^n \neq \mathrm{O}(1) \implies r \geqslant \mathrm{R}_3$$

Ceci prouve respectivement $\mathrm{Re} \leqslant \mathrm{R}_3$ et $\mathrm{Re} \geqslant \mathrm{R}_3$ et on conclut

$$\boxed{\mathrm{R}_3 = \mathrm{e}\,\mathrm{R}}$$

Exercice 9 (***)

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer $$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathrm{e}^z$$

Corrigé : Soit $z \in \mathbb{C}$. Avec la convention $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$, on obtient pour n entier non nul

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\binom{n}{k}}{n^k} z^k$$

On pose $$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \qquad u_k(n) = \frac{\binom{n}{k}}{n^k} z^k$$

Soit k entier. Pour $n > k$, on trouve

$$u_k(n) = \frac{z^k}{k!} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{z^k}{k!}$$

et $$\forall (n,k)\in \mathbb{N}^*\times\mathbb{N} \qquad |u_k(n)| \leqslant \frac{|z|^k}{k!}$$

Ainsi, la série $\sum u_k$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{N}^*$ et d'après le théorème de double limite, on a

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{k!}$$

Autrement dit $$\boxed{\forall z\in\mathbb{C} \qquad \left(1+\frac{z}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{z}}$$

Variante : Soit $z\in\mathbb{C}$ et n entier non nul. On a par factorisation de Bernoulli

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - \mathrm{e}^z = \left(\mathrm{e}^{\frac{z}{n}}\right)^n - \left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \left(\mathrm{e}^{\frac{z}{n}} - \left(1+\frac{z}{n}\right)\right)\sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{e}^{\frac{z}{n}}\right)^k\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n-1-k}$$

Par inégalité triangulaire, on trouve

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{\frac{kz}{n}}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n-1-k}\right| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left|\mathrm{e}^{\frac{z}{n}}\right|^k\left|1+\frac{z}{n}\right|^{n-1-k}\\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{e}^{\frac{|z|}{n}}\right)^k\left(1+\frac{|z|}{n}\right)^{n-1-k} \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{e}^{\frac{|z|}{n}}\right)^k\left(\mathrm{e}^{\frac{|z|}{n}}\right)^{n-1-k} \leqslant n\mathrm{e}^{\frac{|z|(n-1)}{n}}\end{aligned}$$

Ainsi, on trouve

$$\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - \mathrm{e}^z\right| \leqslant \left|\mathrm{e}^{\frac{z}{n}} - 1 - \frac{z}{n}\right| n\mathrm{e}^{|z|} \leqslant n\mathrm{e}^{|z|}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{|z|^k}{n^k k!} \leqslant n\mathrm{e}^{|z|}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{|z|^k}{n^2 k!} \leqslant \frac{1}{n}\mathrm{e}^{|z|}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{|z|^k}{k!}$$

Le résultat suit.

Exercice 10 (***)

Soit $\mathrm{A}\in\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$. Déterminer le rayon de convergence puis la somme de la série entière $\sum \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^n)z^n$ en fonction de χ_{A}.

Corrigé : Il existe $\mathrm{P}\in\mathrm{GL}_p(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{D}+\mathrm{T}$ avec $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1\mathrm{I}_{m_1},\ldots,\lambda_r\mathrm{I}_{m_r})$ et T triangulaire supérieure. Pour n entier, on a $\mathrm{A}^n = \mathrm{P}(\mathrm{D}^n+\mathrm{T}_n)\mathrm{P}^{-1}$ avec T_n triangulaire supérieure d'où

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^n) = \sum_{i=1}^{r} m_i\lambda_i^n$$

On note ρ le *rayon spectral* de la matrice A défini par

$$\rho = \max\{|\lambda|\,,\lambda\in\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})\}$$

On a $$\forall n\in\mathbb{N} \qquad |\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^n)| \leqslant p\rho^n$$

On en déduit $\mathrm{R} = +\infty$ si $\rho = 0$ et $\mathrm{R}\geqslant \dfrac{1}{\rho}$ si $\rho>0$. Pour $z\in\mathrm{D}(0,1/\rho)$, il vient par linéarité du symbole somme (car convergence des séries concernées)

$$\mathrm{S}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^n)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{r}m_i\lambda_i^n\right)z^n = \sum_{i=1}^{r}m_i\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda_i^n z^n\right) = \sum_{i=1}^{r}\frac{m_i}{1-\lambda_i z}$$

Si $\mathrm{R} > \dfrac{1}{\rho}$, on aurait S continue en $\dfrac{1}{\lambda_{i_0}}$ avec $|\lambda_{i_0}| = \rho$ ce qui est faux d'après l'expression précédemment obtenue valide dans $\mathrm{D}(0,1/\rho)$. En effet, on constate

$$|\mathrm{S}(z)| \xrightarrow[z\to 1/\lambda_{i_0}]{} +\infty$$

ce qui contredit la continuité de S en ce point. On en déduit $\mathrm{R} = \dfrac{1}{\rho}$. Enfin, on a l'écriture factorisée

$$\chi_{\mathrm{A}} = \prod_{i=1}^{r} (\mathrm{X} - \lambda_i)^{m_i}$$

puis la décomposition en éléments simples

$$\frac{\chi'_{\mathrm{A}}}{\chi_{\mathrm{A}}} = \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{\mathrm{X} - \lambda_i}$$

d'où $\qquad \forall z \in \mathrm{D}(0,\mathrm{R}) \setminus \{0\} \qquad \dfrac{\chi'_{\mathrm{A}}}{\chi_{\mathrm{A}}}\left(\dfrac{1}{z}\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{1/z - \lambda_i} = z\mathrm{S}(z)$

On conclut

$$\boxed{\text{La série entière } \sum \operatorname{Tr}(\mathrm{A}^n) z^n \text{ a pour rayon de convergence } \mathrm{R} = \frac{1}{\rho} \text{ avec } \rho \text{ rayon spectral de A et pour } z \in \mathrm{D}(0,\mathrm{R}) \setminus \{0\}, \text{ on a } \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Tr}(\mathrm{A}^n) z^n = \frac{1}{z}\frac{\chi'_{\mathrm{A}}}{\chi_{\mathrm{A}}}\left(\frac{1}{z}\right).}$$

Exercice 11 (***)

Déterminer le rayon puis un équivalent en 1 de la somme de la série entière $\sum x^{n^2}$.

Corrigé : Soit $r \geqslant 0$. On a $\qquad r^{n^2} = \mathrm{O}(1) \iff r \leqslant 1$

Il s'ensuit $\qquad \boxed{\mathrm{R} = 1}$

On pose $\qquad \forall x \in \,]-1\,;1\,[\qquad \mathrm{S}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$

Fixons $x \in \,]\,0\,;1\,[$. L'application $t \mapsto x^{t^2} = \mathrm{e}^{t^2 \ln(x)}$ est continue, décroissante, positive sur $\mathbb{R}_+$ d'où

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad x^{(n+1)^2} \leqslant \int_n^{n+1} \mathrm{e}^{t^2\ln(x)}\,\mathrm{d}t \leqslant x^{n^2}$$

D'après le théorème de comparaison série/intégrale, la série $\sum x^{n^2}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{t^2\ln(x)}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature donc convergentes et après sommation

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{t^2\ln(x)}\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{S}(x) = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} x^{(n+1)^2} \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{t^2\ln(x)}\,\mathrm{d}t$$

Connaissant l'intégrale de Gauss, le changement de variables $u = \left(\sqrt{-\ln(x)}\right) t$ donne

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{t^2\ln(x)}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{|\ln(x)|}}$$

D'où $\qquad \boxed{\mathrm{S}(x) \underset{x\to 1}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}}}$