TD MQ1 – Introduction à la mécanique quantique ondulatoire

Exercice 1*♥ : Quantique ou classique ?

En 1925, Elsasser a fait remarquer que l'on peut vérifier la nature ondulatoire de particules matérielles de la même façon qu'on a vérifié en 1912 la nature ondulatoire des rayons X, c'est-à-dire en leur faisant traverser un solide cristallin conduisant à l'obtention d'un phénomène de diffraction.

1) Peut-on révéler ainsi la nature ondulatoire de grains de poussière de masse $m = 1.10^{-15}$ kg et de vitesse 1 mm/s ?
2) Qu'en est-il d'électrons accélérés par une différence de potentiel V (en les supposant non relativistes) ? AN pour V=100V. On donne la masse d'un électron : $m_e = 9.10^{-31}$kg.

Exercice 2* (CE de MPSI) : Diffraction et principe d'indétermination de Heisenberg

De la lumière de longueur d'onde λ est envoyée au travers d'une fente de largeur a en incidence normale.

1) Dans quelle gamme θ_0 d'angles (par rapport à la normale) la lumière est-elle diffractée ?

On interprète dans la suite de l'exercice le phénomène d'un point de vue corpusculaire.

2) Lors du passage par la fente, sur quelle gamme de positions Δx selon l'axe (Ox) se situe nécessairement le photon ?
3) D'après le principe d'indétermination de Heisenberg, quelle est l'indétermination Δp_x de la quantité de mouvement suivant (Ox) ?
4) Retrouver l'ordre de grandeur de l'angle de diffraction du 1).

Exercice 3* : Particule dans une boîte unidimensionnelle

Une particule, de masse *m* et d'énergie *E*, est confinée dans l'intervalle $0 \leq x \leq L$ où son énergie potentielle est choisie nulle : $V(x) = 0$.

1) On adopte dans cette question un traitement classique. La probabilité $dP_{cl}(x)$ que la particule ait une abscisse comprise entre x et $x + dx$ est alors proportionnelle à la durée de passage dt entre ces deux abscisses.
   a) En exploitant la conservation de l'énergie, exprimer la vitesse classique v(x) de la particule à l'abscisse x.
   b) Déterminer l'expression de $dP_{cl}(x)$.
   c) Calculer la probabilité de présence de la particule entre les abscisses 0 et $L/4$.

2) On adopte maintenant un traitement quantique. L'énergie E de la particule correspond à un état stationnaire représenté par la fonction d'onde:

$$\Psi_n(x,t) = A_n \sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right)\exp\left(-i\frac{Et}{\hbar}\right)$$

où n est un entier strictement positif et A_n une constante réelle.
   a) Déterminer la constante A_n.
   b) Calculer la probabilité de présence de la particule entre les abscisses 0 et $L/4$.
   c) Que devient ce résultat dans la limite où $n \gg 1$. Commenter

Exercice 4$^{**♥}$ **: Etat fondamental de l'atome d'hydrogène** (3D en coordonnées sphériques)

Dans l'état fondamental, un électron en orbite autour d'un proton fixe en O est décrit par une fonction d'onde de partie spatiale : φ(M)=Aexp(-r/a) où r=OM et a et A sont des constantes réelles positives.

1) Quel est, au premier ordre en dr, le volume compris entre les rayons r et r+dr ?
2) En déduire la probabilité pour que la position de l'électron soit mesurée entre les rayons r et r+dr.
3) Proposer une valeur pour A.
4) Pour quelle valeur r_0 de r la probabilité de trouver l'électron est-elle maximale ?
5) Quelle est la valeur moyenne de r dans cet état.
6) Quelle quantité physique représente a ?

On donne $\int_0^{+\infty} x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$ pour α > 0.

Exercice 5$^{**♥}$ **: Fonction d'onde pour un potentiel harmonique**

Soit ψ(x,t) la fonction d'onde d'une particule de masse m pouvant se déplacer sur l'axe (Ox) :

$$\psi(x,t) = Aexp(-\frac{m\omega_0 x^2}{2\hbar} - i\frac{\omega_0}{2}t)$$ où A et ω_0 sont des constantes.

1) Quelles sont les dimensions de A et ω_0 ?
2) Quelles sont les valeurs possibles de A ?
3) Quel type d'état est représenté par cette fonction d'onde ? Quelle est l'énergie de la particule ?
4) A quelle énergie potentielle V(x) est soumise cette particule ?
5) Dans quels types de situations rencontre-t-on cette énergie potentielle ?
6) Quelle est la valeur moyenne $\langle x\rangle$ de la position x de la particule ?
7) Qu'en est-il de la moyenne quadratique $\langle x^2\rangle$?
8) Que dire de l'étalement des mesures en quantité de mouvement dans cet état ?

On donne, pour α>0, $\int_{-\infty}^{+\infty} exp(-\alpha u^2)du = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 exp(-\alpha u^2)du = \sqrt{\frac{\pi}{4\alpha^3}}$

Réponses :

Ex 1 : 1) $\lambda_{DB} = 7.10^{-16}$m non détectable 2) $v = 6.10^6$ m.s^{-1} et $\lambda_{DB} = 1.10^{-10}$m détectable.

Ex 2 : 1) $sin(\theta_{max}) \approx \frac{\lambda}{a}$ 2) $\Delta x \approx a/2$ 3) $\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{a}$ 4) $\Delta(sin(\theta)) \geq \frac{\lambda}{2\pi a}$

Ex 3 : 1)a) $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$ b) $dP_{cl} = Adt$ avec $dt = dx/v$ et par normalisation $A = \sqrt{\frac{2E}{mL^2}}$ donc $dP_{cl} = dx/L$

c) P_{cl} = ¼ 2) a) Par normalisation $A_n = \sqrt{\frac{2}{L}}$ b) $P_Q = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n\pi}\sin(\frac{n\pi}{2})$ c) Si n>>1, $P_Q \approx P_{cl}$

Ex 4 : 1) $dv = 4\pi r^2 dr$ 2) $dP = 4\pi A^2 r^2 e^{-2r/a} dr$ 3) Par normalisation $A = \frac{1}{\sqrt{\pi}a^{3/2}}$ 4) $r_0 = a$

5) $\langle r\rangle = \int r dP = 3a/2$ 6) Ordre de grandeur du rayon de l'atome

Ex 5 : 2) $A = \sqrt[4]{\frac{2m\omega_0}{h}}$ à une phase près 3) Etat stationnaire d'énergie $E = \frac{\hbar\omega_0}{2}$ 4) $V(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$

6) $\langle x\rangle = 0$ 7) $\langle x^2\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega_0}$ 8) $\Delta p_x \geq \sqrt{\frac{m\omega_0\hbar}{2}}$