ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°60

Exercice 1 (***)

Soit E euclidien de dimension n entier non nul et $f \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$. On note $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de f et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres associées aux λ_i. On fixe $k \in [\![1\,; n]\!]$.

1. On note $\mathrm{E}_k = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_k)$, $\mathrm{F}_k = \mathrm{Vect}\,(e_k, \ldots, e_n)$ et f_1, f_2 les endomorphismes induits par f respectivement sur E_k et F_k. Déterminer λ_k en fonction de f_1 puis en fonction de f_2.
2. On note $\mathscr{A}_k$ l'ensemble des sev de E de dimension k. Montrer le *théorème du minimax* :

$$\lambda_k = \underset{\mathrm{F}\in\mathscr{A}_k}{\mathrm{Min}} \ \underset{x\in\mathrm{F},\|x\|=1}{\mathrm{Max}} \langle f(x), x\rangle = \underset{\mathrm{F}\in\mathscr{A}_{n-k+1}}{\mathrm{Max}} \ \underset{x\in\mathrm{F},\|x\|=1}{\mathrm{Min}} \langle f(x), x\rangle$$

Corrigé : Pour F sev de E, les quantités $\underset{x\in\mathrm{F},\|x\|=1}{\mathrm{Max}} \langle f(x), x\rangle$ et $\underset{x\in\mathrm{F},\|x\|=1}{\mathrm{Min}} \langle f(x), x\rangle$ sont bien définies puisque $x \mapsto \langle f(x), x\rangle$ est continue sur la sphère unité de F qui est compacte (fermée bornée dans un espace de dimension finie).

1. Si $x \in \mathrm{E}_k$, on a $x = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i e_i$ puis

$$\langle f_1(x), x\rangle = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i^2 \leqslant \lambda_k \|x\|^2$$

avec égalité si $x = e_k$. De même, pour $x \in \mathrm{F}_k$, on a $x = \sum\limits_{i=k}^{n} x_i e_i$ puis

$$\langle f_2(x), x\rangle = \sum_{i=k}^{n} \lambda_i x_i^2 \geqslant \lambda_k \|x\|^2$$

avec égalité si $x = e_k$. On conclut

$$\boxed{\forall k \in [\![1\,; n]\!] \qquad \lambda_k = \underset{x\in\mathrm{E}_k,\|x\|=1}{\mathrm{Max}} \langle f_1(x), x\rangle = \underset{x\in\mathrm{F}_k,\|x\|=1}{\mathrm{Min}} \langle f_2(x), x\rangle}$$

2. Soit $\mathrm{F} \in \mathscr{A}_k$. Pour raison de dimension, on a $\mathrm{F}_k \cap \mathrm{F} \neq \{0_\mathrm{E}\}$. On peut choisir x normé dans $\mathrm{F}_k \cap \mathrm{F}$. D'après, ce qui précède, on a $\langle f(x), x\rangle \geqslant \lambda_k$ d'où $\underset{x\in\mathrm{F},\|x\|=1}{\mathrm{Max}} \langle f(x), x\rangle \geqslant \lambda_k$ et par passage à la borne inférieure

$$\underset{\mathrm{F}\in\in\mathscr{A}_k}{\mathrm{Inf}} \ \underset{x\in\mathrm{F},\|x\|=1}{\mathrm{Max}} \langle f(x), x\rangle \geqslant \lambda_k$$

Cette borne inférieure est atteinte pour $\mathrm{F} = \mathrm{E}_k \in \mathscr{A}_k$ et par conséquent

$$\lambda_k = \underset{\mathrm{F}\in\mathscr{A}_k}{\mathrm{Min}} \ \underset{x\in\mathrm{F},\|x\|=1}{\mathrm{Max}} \langle f(x), x\rangle$$

Soit $\mathrm{F} \in \mathscr{A}_{n-k+1}$. Toujours pour raison de dimension, on a $\mathrm{E}_k \cap \mathrm{F} \neq \{0_\mathrm{E}\}$. On peut choisir x normé dans $\mathrm{E}_k \cap \mathrm{F}$. D'après le résultat de la question précédente, on $\langle f(x), x\rangle \leqslant \lambda_k$ d'où $\underset{x\in\mathrm{F},\|x\|=1}{\mathrm{Min}} \langle f(x), x\rangle \leqslant \lambda_k$. Par passage à la borne supérieure puis en remarquant que cette borne est atteinte pour $\mathrm{F} = \mathrm{F}_k$, on conclut

$$\boxed{\lambda_k = \underset{\mathrm{F}\in\mathscr{A}_k}{\mathrm{Min}} \ \underset{x\in\mathrm{F},\|x\|=1}{\mathrm{Max}} \langle f(x), x\rangle = \underset{\mathrm{F}\in\mathscr{A}_{n-k+1}}{\mathrm{Max}} \ \underset{x\in\mathrm{F},\|x\|=1}{\mathrm{Min}} \langle f(x), x\rangle}$$

Exercice 2 (***)

Soit E euclidien de dimension n entier non nul, H un hyperplan de E, $f \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$ et g l'endomorphisme induit sur H par $p_{\mathrm{H}} \circ f$.

1. Justifier que $g \in \mathscr{S}(\mathrm{H})$.
2. On note $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de f et $\mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_{n-1}$ les valeurs propres de g. Montrer

$$\lambda_1 \leqslant \mu_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{n-1} \leqslant \mu_{n-1} \leqslant \lambda_n$$

Corrigé : 1. Soit $(x, y) \in \mathrm{H}^2$. On note $p = p_{\mathrm{H}}$ pour alléger la suite. Il s'agit d'un projecteur orthogonal donc par théorème, on a $p \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$. Puis, on trouve en utilisant $p \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$, $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(\operatorname{id} - p)$, $f \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$

$$\begin{aligned} \langle g(x), y\rangle &= \langle p(f(x)), y\rangle = \langle f(x), p(y)\rangle = \langle f(x), y\rangle \\ &= \langle x, f(y)\rangle = \langle p(x), f(y)\rangle = \langle x, p(f(y))\rangle = \langle x, g(y)\rangle \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{g \in \mathscr{S}(\mathrm{H})}$

2. Soit $k \in [\![1\,; n-1]\!]$. On note $\mathscr{A}_k$ l'ensemble des sev de E de dimension k et $\mathscr{B}_k$ l'ensemble des sev de H de dimension k. Pour $\mathrm{F} \in \mathscr{B}_k$, on a

$$\operatorname*{Max}_{x \in \mathrm{F}, \|x\|=1} \langle g(x), x\rangle = \operatorname*{Max}_{x \in \mathrm{F}, \|x\|=1} \langle f(x), x\rangle$$

Ainsi, d'après le théorème du minimax appliqué à g, il vient

$$\mu_k = \operatorname*{Min}_{\mathrm{F} \in \mathscr{B}_k} \operatorname*{Max}_{x \in \mathrm{F}, \|x\|=1} \langle g(x), x\rangle = \operatorname*{Min}_{\mathrm{F} \in \mathscr{B}_k} \operatorname*{Max}_{x \in \mathrm{F}, \|x\|=1} \langle f(x), x\rangle$$

Comme $\mathscr{B}_k \subset \mathscr{A}_k$, il s'ensuit

$$\operatorname*{Min}_{\mathrm{F} \in \mathscr{B}_k} \operatorname*{Max}_{x \in \mathrm{F}, \|x\|=1} \langle f(x), x\rangle \geqslant \operatorname*{Min}_{\mathrm{F} \in \mathscr{A}_k} \operatorname*{Max}_{x \in \mathrm{F}, \|x\|=1} \langle f(x), x\rangle$$

D'après le théorème du minimax appliqué à f, il vient

$$\operatorname*{Min}_{\mathrm{F} \in \mathscr{A}_k} \operatorname*{Max}_{x \in \mathrm{F}, \|x\|=1} \langle f(x), x\rangle = \lambda_k$$

et par conséquent $\mu_k \geqslant \lambda_k$

De même, pour $\mathrm{F} \in \mathscr{B}_{n-k}$, on trouve

$$\mu_k = \operatorname*{Max}_{\mathrm{F} \in \mathscr{B}_{n-k}} \operatorname*{Min}_{x \in \mathrm{F}, \|x\|=1} \langle g(x), x\rangle = \operatorname*{Max}_{\mathrm{F} \in \mathscr{A}_{n-k}} \operatorname*{Min}_{x \in \mathrm{F}, \|x\|=1} \langle f(x), x\rangle$$

et comme $\mathscr{B}_{n-k} \subset \mathscr{A}_{n-k}$,

$$\operatorname*{Max}_{\mathrm{F} \in \mathscr{B}_{n-k}} \operatorname*{Min}_{x \in \mathrm{F}, \|x\|=1} \langle f(x), x\rangle \leqslant \operatorname*{Max}_{\mathrm{F} \in \mathscr{A}_{n-k}} \operatorname*{Min}_{x \in \mathrm{F}, \|x\|=1} \langle f(x), x\rangle$$

et

$$\operatorname*{Max}_{\mathrm{F} \in \mathscr{A}_{n-k}} \operatorname*{Min}_{x \in \mathrm{F}, \|x\|=1} \langle f(x), x\rangle = \lambda_{k+1}$$

d'où $\mu_k \leqslant \lambda_{k+1}$

On conclut $\boxed{\lambda_1 \leqslant \mu_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{n-1} \leqslant \mu_{n-1} \leqslant \lambda_n}$

Exercice 3 (***)

Soit E euclidien et p, q des projecteurs orthogonaux.

1. Montrer que $p \circ q \circ p \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$.
2. Déterminer $(\mathrm{Im}\ p + \mathrm{Ker}\ q)^{\perp}$.
3. En déduire que $p \circ q$ est diagonalisable.

Corrigé : 1. On sait que p, q sont des endomorphismes symétriques en tant que projecteurs orthogonaux. Soit $(x, y) \in \mathrm{E}^2$. On a

$$\langle p \circ q \circ p(x), y\rangle = \langle q \circ p(x), p(y)\rangle = \langle p(x), q \circ p(y)\rangle = \langle x, p \circ q \circ p(y)\rangle$$

Ainsi $\boxed{p \circ q \circ p \in \mathscr{S}(\mathrm{E})}$

2. Soient F, G sev de E. Montrons $(\mathrm{F} + \mathrm{G})^{\perp} = \mathrm{F}^{\perp} \cap \mathrm{G}^{\perp}$. Soit $x \in \mathrm{F}^{\perp} \cap \mathrm{G}^{\perp}$. On a

$$\forall (y, z) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G} \qquad \langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle = 0$$

ce qui prouve $\mathrm{F}^{\perp} \cap \mathrm{G}^{\perp} \subset (\mathrm{F} + \mathrm{G})^{\perp}$. Réciproquement, soit $x \in (\mathrm{F} + \mathrm{G})^{\perp}$. Pour $y \in \mathrm{F}$, on a $y + 0_{\mathrm{E}} \in \mathrm{F} + \mathrm{G}$ d'où $\langle x, y\rangle = 0$ d'où $x \in \mathrm{F}^{\perp}$ et de même, pour $z \in \mathrm{G}$, on a $0_{\mathrm{E}} + z \in \mathrm{F} + \mathrm{G}$ d'où $\langle x, z\rangle = 0$ d'où $x \in \mathrm{G}^{\perp}$ ce qui prouve $x \in \mathrm{F}^{\perp} \cap \mathrm{G}^{\perp}$. On a donc établi

$$(\mathrm{F} + \mathrm{G})^{\perp} = \mathrm{F}^{\perp} \cap \mathrm{G}^{\perp}$$

En appliquant ce résultat avec Im p et Ker p, on conclut

$$\boxed{(\mathrm{Im}\ p + \mathrm{Ker}\ q)^{\perp} = (\mathrm{Im}\ p)^{\perp} \cap (\mathrm{Ker}\ q)^{\perp} = \mathrm{Ker}\ p \cap \mathrm{Im}\ q}$$

3. Comme Im p est stable par $p \circ q \circ p$, on peut considérer l'endomorphisme induit u sur Im p qui est également symétrique. On note $(e_1, \ldots, e_r)$ une base orthonormée de vecteurs propres de u. On a donc $u(e_i) = p \circ q \circ p(e_i) = p \circ q(e_i) = \lambda_i e_i$ avec les λ_i réels. On complète ensuite la famille $(e_1, \ldots, e_r)$ par des éléments $(e_{r+1}, \ldots, e_{\ell})$ de Ker q pour former une base orthonormée de Im p + Ker q puis par une base orthonormée $(e_{\ell}, \ldots, e_n)$ de Ker $p \cap$ Im q. On obtient alors une base orthonormée de E vérifiant

$$\forall i \in [\![1 ; r]\!] \qquad p \circ q(e_i) = \lambda_i e_i \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![r+1 ; n]\!] \qquad p \circ q(e_i) = 0$$

Ainsi $\boxed{\text{L'endomorphisme } p \circ q \text{ est diagonalisable.}}$

Exercice 4 (***)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathrm{A}^{\top}\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.
2. Montrer qu'il existe U, V dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des réels positifs tels que

$$\mathrm{A} = \mathrm{U}\Delta\mathrm{V} \quad \text{avec} \quad \Delta = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

Corrigé : 1. On a clairement $\mathrm{A}^{\top}\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ puis, pour $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$$\left\langle \mathrm{X}, \mathrm{A}^{\top}\mathrm{A}\mathrm{X}\right\rangle = \mathrm{X}^{\top}\mathrm{A}^{\top}\mathrm{A}\mathrm{X} = \langle \mathrm{A}\mathrm{X}, \mathrm{A}\mathrm{X}\rangle \geqslant 0$$

Ainsi $\boxed{\mathrm{A}^{\top}\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})}$

2. Pour λ réel et $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tels que $\mathrm{A}^{\top}\mathrm{A}\mathrm{X} = \lambda\mathrm{X}$, il vient

$$\left\langle \mathrm{X}, \mathrm{A}^{\top}\mathrm{A}\mathrm{X}\right\rangle = \lambda\|\mathrm{X}\|^2 \geqslant 0$$

et comme $\|X\|^2 > 0$, il s'ensuit $\lambda \geqslant 0$. Supposons $A \in GL_n(\mathbb{R})$. On a alors $\mathrm{Sp}(A) \subset]\,0\,;+\infty\,[$. D'après le théorème spectral, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A^\top A = PDP^\top \quad \text{avec} \quad D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

et les $\lambda_i > 0$. On pose

$$V = P^\top \qquad \Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}) \qquad U = AV^\top\Delta^{-1}$$

ce qui est licite puisque Δ est diagonale avec des termes diagonaux non nuls donc inversible. Par construction, on a $A = U\Delta V$ et $V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Puis, on vérifie

$$U^\top U = \Delta^{-1}VA^\top AV^\top\Delta^{-1} = \Delta^{-1}VV^\top\Delta^2VV^\top\Delta^{-1} = \Delta^{-1}\Delta^2\Delta^{-1} = I_n$$

Ainsi, pour $A \in GL_n(\mathbb{R})$, il existe U, V dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et Δ diagonale à coefficients positifs telles que $A = U\Delta V$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Par densité de $GL_n(\mathbb{R})$, il existe $(A_k)_k \in GL_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que $A_k \xrightarrow[k\to\infty]{} A$. D'après le résultat préliminaire, pour tout k entier, il existe U_k, V_k dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et D_k diagonale à coefficients positifs telles que $A_k = U_kD_kV_k$. La suite $(U_k, V_k)_k$ est à valeurs dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})^2$ compact en tant que produit fini de compacts. Par conséquent, il existe φ extractrice telle que

$$(U_{\varphi(k)}, V_{\varphi(k)}) \xrightarrow[k\to\infty]{} (U, V) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})^2$$

Par continuité du produit matriciel, on a

$${U_{\varphi(k)}}^\top A_{\varphi(k)}{V_{\varphi(k)}}^\top \xrightarrow[k\to\infty]{} U^\top AV^\top = \Delta$$

et comme la suite $\left({U_k}^\top A_k{V_k}^\top\right)_k$ est à valeurs dans l'ensemble des matrices diagonales à coefficients positifs qui est clairement un fermé, il en résulte que Δ est diagonale à coefficients positifs. Ainsi

$$\boxed{\text{Il existe U, V dans } \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \text{ et les } \alpha_i \geqslant 0 \text{ tels que } A = U\Delta V \text{ avec } \Delta = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).}$$

Remarque : Il s'agit de la *décomposition en valeurs singulières.*

Exercice 5 (****)

Soit E euclidien et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille libre de vecteurs de E. Montrer qu'il existe $(y_1, \ldots, y_n)$ famille de vecteurs normés de E vérifiant $\|y_i - y_j\| = 1$ pour tout $i \neq j$ et

$$\forall k \in [\![\,1\,;\,n\,]\!] \qquad \mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_k) = \mathrm{Vect}\,(y_1, \ldots, y_k)$$

Corrigé : Une famille de vecteurs de E normés et équidistants est dite *régulière.* Par orthonormalisation de Gram-Schmidt, il existe $(u_1, \ldots, u_n)$ famille orthonormée de E qui vérifie le grossissement simultané

$$\forall k \in [\![\,1\,;\,n\,]\!] \qquad \mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_k) = \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_k)$$

On pose $G = \dfrac{1}{2}(J + I_n)$ avec $J \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ matrice constituée de 1. On montre que G est orthogonalement semblable à $\dfrac{1}{2}\,\mathrm{diag}(n+1, I_{n-1})$. Par conséquent, il existe $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $G = S^2 = S^\top S$. On pose

$$\forall j \in [\![\,1\,;\,n\,]\!] \qquad v_j = \sum_{i=1}^{n} s_{i,j}u_i$$

Ainsi $$\forall (i,j) \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]^2 \qquad \langle v_i, v_j\rangle = \sum_{k=1}^{n} s_{i,k}s_{j,k} = (S^\top S)_{i,j}$$

Par construction, la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est régulière mais on n'a pas *a priori* le grossissement simultané. La matrice G est inversible et par propriété sur les matrices de Gram

$$\mathrm{rg}\,(v_1, \ldots, v_n) = \mathrm{rg}\;\mathrm{G} = n$$

autrement dit, la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est libre. Soit $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ obtenue par orthonormalisation de Gram-Schmidt de $(v_1, \ldots, v_n)$. On définit $f \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ par

$$\forall i \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad f(\varepsilon_i) = u_i$$

et on pose $$\forall i \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad y_i = f(v_i)$$

L'application f étant une isométrie, on a

$$\forall i \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad \|y_i\| = \|f(v_i)\| = \|v_i\| = 1$$

et $$\forall (i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2 \qquad \|y_i - y_j\| = \|f(v_i - v_j)\| = \|v_i - v_j\| = \delta_{i,j}$$

Ainsi, la famille $(y_1, \ldots, y_n)$ est régulière. Enfin, pour $k \in [\![1\,;\, n]\!]$, sachant $\mathrm{Vect}\,(v_1, \ldots, v_k) = \mathrm{Vect}\,(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$, il vient

$$\begin{aligned} \mathrm{Vect}\,(y_1, \ldots, y_k) &= \mathrm{Vect}\,(f(v_1), \ldots, f(v_k)) \\ &= \mathrm{Vect}\,(f(\varepsilon_1), \ldots, f(\varepsilon_k)) = \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_k) \end{aligned}$$

ce qui prouve le grossissement simultané. On conclut

$$\boxed{\text{Il existe une famille régulière qui vérifie le grossissement simultané avec } (x_1, \ldots, x_n).}$$

Exercice 6 (****)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\alpha > 0$. On note

$$\mathcal{S}_\alpha = \{\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) \mid \det(\mathrm{M}) \geqslant \alpha\}$$

Établir $$\operatorname*{Inf}_{\mathrm{M} \in \mathcal{S}_\alpha} \mathrm{Tr}\,(\mathrm{AM}) = n\,(\alpha \det(\mathrm{A}))^{\frac{1}{n}}$$

Corrigé : Soit $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A} = \mathrm{S}^2$. Par propriété fondamentale de la trace, on a

$$\forall \mathrm{M} \in \mathcal{S}_\alpha \qquad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{AM}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{S}^2\mathrm{M}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{SMS})$$

On a clairement $\mathrm{SMS} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et

$$\forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \qquad \langle \mathrm{X}, \mathrm{SMSX} \rangle = \langle \mathrm{SX}, \mathrm{M(SX)} \rangle \geqslant 0$$

d'où $\mathrm{SMS} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et par suite $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{SMS}) \geqslant 0$ puisque $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{SMS}) \subset [\,0\,;+\infty\,[$. Supposons $0 \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})$. D'après le théorème spectral, il existe $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{P}^\top \mathrm{AP} = \mathrm{diag}(0, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Soit $\mathrm{M} = \mathrm{P}\,\mathrm{diag}(\beta, \varepsilon \mathrm{I}_{n-1})\mathrm{P}^\top$ avec $\varepsilon > 0$ et $\beta \geqslant \alpha \varepsilon^{1-n}$. Par construction, on a $\mathrm{M} \in \mathcal{S}_\alpha$ et on trouve $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{AM}) = \varepsilon\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})$. On peut donc rendre $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{AM})$ arbitrairement arbitrairement petit d'où, pour $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

$$\operatorname*{Inf}_{\mathrm{M} \in \mathcal{S}_\alpha} \mathrm{Tr}\,(\mathrm{AM}) = 0 = n\,(\alpha \det(\mathrm{A}))^{\frac{1}{n}}$$

Supposons désormais $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. La racine carrée S est également dans $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. L'application $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{SMS}$ réalise alors une bijection de $\mathcal{S}_\alpha$ dans $\mathcal{S}_{\alpha \det(\mathrm{A})}$ de réciproque $\mathrm{N} \mapsto \mathrm{S}^{-1}\mathrm{N}\mathrm{S}^{-1}$. Ainsi, on a

$$\operatorname*{Inf}_{\mathrm{M} \in \mathcal{S}_\alpha} \mathrm{Tr}\,(\mathrm{AM}) = \operatorname*{Inf}_{\mathrm{M} \in \mathcal{S}_\alpha} \mathrm{Tr}\,(\mathrm{SMS}) = \operatorname*{Inf}_{\mathrm{M} \in \mathcal{S}_{\alpha \det(\mathrm{A})}} \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})$$

Pour $\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, la matrice M est diagonalisable d'après le théorème spectral et par inégalité arithmético-géométrique, le spectre de M étant inclus dans $[\,0\,;+\infty\,[$, on trouve

$$(\det(\mathrm{M}))^{\frac{1}{n}} = \left(\prod_{i=1}^{n} \mu_i\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_i = \frac{1}{n}\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})$$

avec les μ_i valeurs propres de M et par suite

$$\operatorname*{Inf}_{\mathrm{M}\in\mathcal{S}_{\alpha\det(\mathrm{A})}} \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) \geqslant n\,(\alpha\det(\mathrm{A}))^{\frac{1}{n}}$$

Cette inégalité est une égalité pour $\mathrm{M} = (\alpha\det(\mathrm{A}))^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{I}_n$ qui est bien dans $\mathcal{S}_{\alpha\det\mathrm{A}}$. On conclut

$$\boxed{\operatorname*{Inf}_{\mathrm{M}\in\mathcal{S}_{\alpha}} \mathrm{Tr}\,(\mathrm{AM}) = n\,(\alpha\det(\mathrm{A}))^{\frac{1}{n}}}$$