# Feuille d'exercices n°58

## Exercice 1 (*)

Soit $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Que vaut $\langle AX, X \rangle$ pour $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ?

## Exercice 2 (*)

Montrer que le théorème spectral est une équivalence, à savoir pour $u \in \mathscr{L}(E)$ avec E euclidien

$$u \in \mathscr{S}(E) \iff \text{il existe une base orthonormée de vecteurs propres de } u$$

## Exercice 3 (*)

Déterminer $u \in \mathscr{S}(E)$ vérifiant $\langle u(x), x \rangle = 0$ pour tout $x \in E$.

## Exercice 4 (*)

Soit E euclidien et $u \in \mathscr{S}(E)$. Établir l'égalité $E = \operatorname{Im} u \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Ker} u$.

## Exercice 5 (*)

Déterminer les matrices $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^3 + M^2 + M = 0$.

## Exercice 6 (*)

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ avec E euclidien. Montrer

$$u \in \mathscr{S}(E) \cap \mathcal{O}(E) \iff u \text{ symétrie orthogonale}$$

## Exercice 7 (*)

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^\top M = M$. Caractériser M.

## Exercice 8 (**)

Soit E euclidien et $p$, $q$ des projecteurs orthogonaux. Montrer

$$p \circ q = 0 \iff q \circ p = 0$$

## Exercice 9 (**)

Soit $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = S^2$ puis montrer qu'on peut choisir $S \in \mathbb{R}[A]$.

## Exercice 10 (**)

Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Pour $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, calculer $\mathrm{X}^\top \mathrm{MX}$.
2. Montrer qu'il existe une unique matrice symétrique $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ telle que
$$\forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \qquad \mathrm{X}^\top \mathrm{MX} = \mathrm{X}^\top \mathrm{SX}$$
Préciser S en fonction de M.
3. Montrer $$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(\mathrm{M}) \subset [\, \min \mathrm{Sp}\,(\mathrm{S})\, ; \max \mathrm{Sp}\,(\mathrm{S})\,]$$

## Exercice 11 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ muni du produit scalaire $\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q} \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\, \mathrm{d}t$ pour $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathrm{E}^2$ .On pose
$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E} \qquad \varphi(\mathrm{P}) = (\mathrm{X}^2 - 1)\mathrm{P}'' + 2\mathrm{XP}'$$
Montrer que $\varphi \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$.

## Exercice 12 (**)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer $$(\det \mathrm{A})^{1/n} \leqslant \frac{1}{n} \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})$$

## Exercice 13 (**)

Montrer $$\left( \frac{1}{i+j-1} \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

## Exercice 14 (**)

Déterminer $a$ et $b$ réels non nuls tels que $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ puis décrire l'isométrie associée dans $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté.

## Exercice 15 (**)

Soit $\mathrm{U} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. On pose $\mathrm{M} = \mathrm{UU}^\top$. Montrer que M est diagonalisable puis préciser ses éléments propres.

## Exercice 16 (**)

Soit E euclidien et $u \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$ tel que $\mathrm{Tr}\,(u) = 0$.

1. Montrer qu'il existe $x \in \mathrm{E} \setminus \{0\}$ tel que $u(x) \perp x$.
2. En déduire l'existence d'une base orthonormée $(e_i)_{i \in [\![ 1\,;\,n ]\!]}$ de E telle que $\langle u(e_i), e_i \rangle = 0$ pour tout $i \in [\![ 1\,;\,n ]\!]$.