ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°59

Exercice 1 (**)

Soit E euclidien et $u \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$. Montrer

$$\operatorname*{Sup}_{\|x\|=1} \|u(x)\| = \operatorname*{Sup}_{\|x\|=1} |\langle u(x), x\rangle| = \max\{|\lambda|, \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\}$$

Exercice 2 (***)

Soit E euclidien et $f \in \mathscr{S}^+(\mathrm{E})$. Montrer qu'il existe un unique $g \in \mathscr{S}^+(\mathrm{E})$ tel que $f = g^2$.

Exercice 3 (***)

Pour $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{B} = \sqrt{\mathrm{A}}$ l'unique matrice $\mathrm{B} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ solution de $\mathrm{B}^2 = \mathrm{A}$. Montrer la continuité de cette application $\sqrt{\cdot}$.

Exercice 4 (***)

Soit $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et φ définie sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ par

$$\forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \qquad \varphi(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^\top \mathrm{S}\mathrm{X} - 2\mathrm{X}^\top \mathrm{B}$$

Montrer que φ admet un minimum et préciser où il est atteint.

Exercice 5 (***)

Soit E euclidien de dimension n, $(u_1, \ldots, u_n) \in \mathrm{E}^n$ et $\mathrm{G} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\mathrm{G} = \big(\langle u_i, u_j\rangle\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

1. Montrer que $\mathrm{G} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.
2. Application : Montrer qu'il existe $(v_1, \ldots, v_n)$ famille de vecteurs normés de E telle que $\|v_i - v_j\| = 1$ pour tout $i \neq j$.

Exercice 6 (**)

Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{A}^3 = \mathrm{B}^3$. Montrer que $\mathrm{A} = \mathrm{B}$.

Exercice 7 (***)

Soit E euclidien et $(u_1, \ldots, u_n)$ une base de E. On pose

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad f(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i\rangle u_i$$

1. Montrer que $f \in \mathscr{S}^{++}(\mathrm{E})$.
2. Justifier l'existence de $g \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$ tel que $g^2 = f^{-1}$.
3. Montrer que $(g(u_1), \ldots, g(u_n))$ est une base orthonormée de E.

Exercice 8 (***)

Montrer $\qquad \forall(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})^2 \qquad 0 \leqslant \mathrm{Tr}\,(\mathrm{AB}) \leqslant \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{B})$

Exercice 9 (***)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{B} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que AB est diagonalisable avec $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{AB}) \subset [\,0\,;+\infty\,[$.

Exercice 10 (***)

Soit E euclidien et $f \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$. On pose

$$\mathrm{X} = \{x \in \mathrm{E} \mid \langle f(x), x\rangle \leqslant 1\}$$

Montrer que X est compact si et seulement si $f \in \mathscr{S}^{++}(\mathrm{E})$.

Exercice 11 (****)

1. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\mathrm{O} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ uniques telles que $\mathrm{A} = \mathrm{OS}$.
2. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\mathrm{O} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{A} = \mathrm{OS}$.
3. A-t-on l'unicité dans la question précédente ?

Exercice 12 (***)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{B} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{D} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telle que
$$\mathrm{A} = \mathrm{P}^\top\mathrm{P} \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = \mathrm{P}^\top\mathrm{DP}$$
2. Établir $\quad \forall(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) \qquad \det(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \geqslant \det \mathrm{A} + \det \mathrm{B}$
3. Le résultat précédent a-t-il lieu si on suppose seulement $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$?

Exercice 13 (***)

Pour $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer $\underset{\mathrm{P}\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})}{\mathrm{Max}}\ \mathrm{Tr}\,(\mathrm{PA})$.

Exercice 14 (***)

1. Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que si G est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ contenant $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{G} = \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 15 (**)

Soit E euclidien et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $\langle u(x), x\rangle = 0$ pour tout $x \in \mathrm{E}$.

1. Montrer $\qquad \forall(x,y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle$

   En déduire la forme $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u$ avec $\mathscr{B}$ base orthonormée de E.
2. On suppose $u \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$. Montrer que $\dim \mathrm{E}$ est paire.
3. Montrer que u^2 est diagonalisable.