ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°60

Exercice 1 (***)

Soit E euclidien de dimension n entier non nul et $f \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$. On note $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de f et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres associées aux λ_i. On fixe $k \in [\![1\,;n]\!]$.

1. On note $\mathrm{E}_k = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_k)$, $\mathrm{F}_k = \mathrm{Vect}\,(e_k, \ldots, e_n)$ et f_1, f_2 les endomorphismes induits par f respectivement sur E_k et F_k. Déterminer λ_k en fonction de f_1 puis en fonction de f_2.
2. On note $\mathscr{A}_k$ l'ensemble des sev de E de dimension k. Montrer le *théorème du minimax* :

$$\lambda_k = \underset{\mathrm{F}\in\mathscr{A}_k}{\mathrm{Min}}\ \underset{x\in\mathrm{F},\|x\|=1}{\mathrm{Max}} \langle f(x), x\rangle = \underset{\mathrm{F}\in\mathscr{A}_{n-k+1}}{\mathrm{Max}}\ \underset{x\in\mathrm{F},\|x\|=1}{\mathrm{Min}} \langle f(x), x\rangle$$

Indications : 1. Calculer $\langle f_1(x), x\rangle$ pour $x \in \mathrm{E}_k$ et $\langle f_2(x), x\rangle$ pour $x \in \mathrm{F}_k$.
2. Pour $\mathrm{F} \in \mathscr{A}_k$, observer que $\mathrm{F}_k \cap \mathrm{F} \neq \{0_\mathrm{E}\}$. En déduire une minoration de $\langle f(x), x\rangle$ avec x normé dans $\mathrm{F} \cap \mathrm{F}_k$ puis une minoration de $\underset{x\in\mathrm{F},\|x\|=1}{\mathrm{Max}} \langle f(x), x\rangle$ et passer ensuite à la borne inférieure pour $\mathrm{F} \in \mathscr{A}_k$. Suivre la même démarche pour $\mathrm{F} \in \mathscr{A}_{n-k+1}$.

Exercice 2 (***)

Soit E euclidien de dimension n entier non nul, H un hyperplan de E, $f \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$ et g l'endomorphisme induit sur H par $p_\mathrm{H} \circ f$.

1. Justifier que $g \in \mathscr{S}(\mathrm{H})$.
2. On note $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de f et $\mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_{n-1}$ les valeurs propres de g. Montrer

$$\lambda_1 \leqslant \mu_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{n-1} \leqslant \mu_{n-1} \leqslant \lambda_n$$

Indications : 1. Notant $p = p_\mathrm{H}$, utiliser le fait que $p \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$ et $f \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$.
2. Pour $k \in [\![1\,;n-1]\!]$, noter $\mathscr{A}_k$ l'ensemble des sev de E de dimension k et $\mathscr{B}_k$ l'ensemble des sev de H de dimension k. Appliquer le théorème du minimax à g sur $\mathscr{B}_k$ et utiliser l'inclusion $\mathscr{B}_k \subset \mathscr{A}_k$ puis appliquer le théorème du minimax à g sur $\mathscr{B}_{n-k}$ et utiliser l'inclusion $\mathscr{B}_{n-k} \subset \mathscr{A}_{n-k}$.

Exercice 3 (***)

Soit E euclidien et p, q des projecteurs orthogonaux.

1. Montrer que $p \circ q \circ p \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$.
2. Déterminer $(\mathrm{Im}\ p + \mathrm{Ker}\ q)^\perp$.
3. En déduire que $p \circ q$ est diagonalisable.

Indications : 1. Utiliser le fait que p et q sont dans $\mathscr{S}(\mathrm{E})$.
2. Pour F et G sev de E, comparer $(\mathrm{F} + \mathrm{G})^\perp$ et $\mathrm{F}^\perp \cap \mathrm{G}^\perp$.
3. Considérer u induit par $p \circ q \circ p$ sur $\mathrm{Im}\ p$. En déduire l'existence d'une base orthonormée de vecteurs propres de u que l'on complète pour former une base orthonormée de $\mathrm{Im}\ p + \mathrm{Ker}\ q$ complétée elle-même par une base de l'orthogonal de ce sev.

Exercice 4 (***)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathrm{A}^\top \mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.
2. Montrer qu'il existe U, V dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des réels positifs tels que

$$\mathrm{A} = \mathrm{U}\Delta\mathrm{V} \quad \text{avec} \quad \Delta = \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

Indications : 2. Supposer $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ puis suivre une démarche analyse/synthèse pour choisir les matrices U, Δ et V. Généraliser pour $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en utilisant la densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5 (****)

Soit E euclidien et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille libre de vecteurs de E. Montrer qu'il existe $(y_1, \ldots, y_n)$ famille de vecteurs normés de E vérifiant $\|y_i - y_j\| = 1$ pour tout $i \neq j$ et

$$\forall k \in [\![1 \,;\, n]\!] \qquad \operatorname{Vect}(x_1, \ldots, x_k) = \operatorname{Vect}(y_1, \ldots, y_k)$$

Indications : Considérer $(u_1, \ldots, u_n)$ obtenue par orthonormalisation de Gram-Schmidt de $(x_1, \ldots, x_n)$. Puis construire $(v_1, \ldots, v_n)$ famille de vecteurs normés équidistants à l'aide d'une matrice de Gram en choisissant les cordonnées des v_j dans la base $(u_1, \ldots, u_n)$. Enfin, considérer l'isométrie f définie par $f(\varepsilon_i) = u_i$ pour $i \in [\![1 \,;\, n]\!]$ avec $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ obtenue par orthonormalisation de Gram-Schmidt de $(v_1, \ldots, v_n)$ puis choisir les y_i.

Exercice 6 (****)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\alpha > 0$. On note

$$\mathcal{S}_\alpha = \{\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) \mid \det(\mathrm{M}) \geqslant \alpha\}$$

Établir

$$\operatorname*{Inf}_{\mathrm{M} \in \mathcal{S}_\alpha} \operatorname{Tr}(\mathrm{AM}) = n\,(\alpha \det(\mathrm{A}))^{\frac{1}{n}}$$

Indications : Pour S racine carrée de A, relier $\operatorname{Tr}(\mathrm{AM})$ et $\operatorname{Tr}(\mathrm{SMS})$ pour $\mathrm{M} \in \mathcal{S}_\alpha$. En déduire dans un premier temps $\operatorname{Tr}(\mathrm{AM}) \geqslant 0$ puis traiter le cas où $0 \in \operatorname{Sp}(\mathrm{A})$. Pour $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{P}^\top \mathrm{AP} = \operatorname{diag}(0, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, choisir $\mathrm{M} = \mathrm{P}\operatorname{diag}(\beta, \varepsilon \mathrm{I}_{n-1})\mathrm{P}^\top$ avec $\varepsilon > 0$ et β à choisir puis conclure pour le cas A non inversible. Si $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, observer que $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{SMS}$ réalise une bijection de $\mathcal{S}_\alpha$ dans $\mathcal{S}_{\alpha \det(\mathrm{A})}$. Conclure en utilisant l'inégalité arithmético-géométrique avec le cas d'égalité.