ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026 05/01/2026

Commentaires - Devoir en temps libre n°11

Problème I

Il faut commencer par dire que l'intégrale définissant $\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q} \rangle$ existe pour $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathrm{E}^2$ (intégrande continu par morceaux sur le segment $[\,0\,;\pi\,]$).

1. Ne pas omettre la bilinéarité du produit en plus de la linéarité de l'intégrale. Il faut expliciter l'intégrande $\theta \mapsto \mathrm{P}(\cos\theta)^2$ et dire sa continuité et positivité sur le segment $[\,0\,;\pi\,]$. Certains évoquent l'injectivité de cos sur $[\,0\,;\pi\,]$ ce qui est maladroit, la surjectivité sur $[\,-1\,;1\,]$ étant plus pertinente puisqu'elle précise l'infinité de racines du polynôme.

2. OK mais il faut préciser que le sev F est de dimension finie pour justifier que p_{F} a du sens et il faut faire un dessin ! Il est fortement recommandé d'écrire le système avec produits scalaires puis de calculer séparément les dits produits scalaires.

3. Il faut rappeler que le sev F est de dimension finie et citer la caractérisation métrique du projeté orthogonal. Il était bienvenu d'utiliser ici l'égalité $\mathrm{d}(1, \mathrm{F})^2 = \langle 1 - p_{\mathrm{F}}(1), 1 \rangle$ (à retrouver rapidement) pour conclure.

Problème II

1. Un manière efficace de faire est de traiter la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ pour k entier puis de conclure par combinaison linéaire. L'existence de Δ_n n'a pas toujours été bien traitée.

2. OK dans l'ensemble, remarques analogues à celles du problème I.

3. OK. Plusieurs invoquent la fonction Γ : ce n'est pas officiellement du cours donc il faut redémontrer sa relation fonctionnelle. Lors de l'intégration par partie, on commence par établir la finitude du crochet avant d'annoncer une égalité.

4. Très inégal, pas tant de bonnes réalisations. Il faut interpréter $\Delta_n = \mathrm{d}(1, \mathrm{F})^2$ avec $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{X}, \ldots, \mathrm{X}^n)$ en sortant le carré de la borne inférieure (par continuité et croissance de $u \mapsto u^2$ sur $\mathbb{R}_+$) puis il faut préciser que le sev F est de dimension finie pour citer la caractérisation métrique du projeté orthogonal, préciser également que $(\mathrm{X}, \ldots, \mathrm{X}^n)$ est une base de F et enfin, utiliser le fait que $\mathrm{d}(1, \mathrm{F})^2 = \langle 1 - p_{\mathrm{F}}(1), 1 \rangle$.

5. Peu réussie : il fallait observer que $\mathrm{P}_n(j) = \langle 1 - p_{\mathrm{F}}(1), \mathrm{X}^j \rangle$ pour $j \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!]$.

6, 7. Plutôt bien réussies. Il ne fallait pas manquer d'examiner $\mathrm{P}_n(-1)$ pour expliciter complètement P_n.