ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026 13/12/25

Commentaires - Devoir surveillé n°4

Problème I

1. Il faut, comme toujours, nommer l'intégrande et préciser sa continuité par morceaux sur un intervalle à préciser. Si on utilise un équivalent avec une fonction intégrable (d'intégrale absolument convergente), la gestion du signe a lieu de fait. Si on conclut en terme de convergence d'intégrale, alors il faut évoquer le signe constant.

2. Trop d'erreurs sur cette question alors que le calcul de changement de variables est très classique. Très peu pensent à justifier que les intégrales sont de même nature donc convergentes et par conséquent égales. L'intégrabilité vient par positivité de l'intégrande.

3. OK même si l'approche la plus élémentaire avec le binôme de Newton n'est pas souvent retenue.

4. OK.

5. Une majorité fait un bon usage du théorème de convergence dominée mais l'intégrabilité de la dominante est à établir également en 0.

6. OK.

Problème II

1. Très peu réussie. L'utilisation conjointe de la valeur absolue et d'équivalents présente des difficultés lourdes pour un grand nombre. À revoir.

2. Quelques un ont pensé à transformer $\dfrac{1}{1-t^n}$ pour n entier en résultat de somme géométrique et à faire bon usage du théorème de sommation par paquets. Très peu ont établi la sommabilité de la famille concernée.

Problème III

1. Certains méconnaissent la structure de sev : c'est inadmissible.

2. Peu réussie : une intégrale de fonction continue par morceaux sur un segment existe ! Pour justifier que $u(f)$ et $v(f)$ sont dans $\mathcal{E}$ avec $f \in \mathcal{E}$, il faut invoquer la régularité $\mathscr{C}^\infty$ d'intégrales à paramètre. À reprendre pour presque tous.

3. OK.

4. Assez bien malgré des rédactions parfois laborieuses pour un résultat très classique.

5. La stricte décroissance a posé problème à un grand nombre. Pour la détermination d'un équivalent, il n'est nullement évident qu'on ait $\mathrm{W}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{W}_{n+1}$ et montrer cette relation n'était absolument pas un passage obligé.

6. Il faut invoquer les bornes atteintes sur $|f|$ continue sur I comme composée de telles fonctions. La majoration de $\mathrm{M}(u(f))$ ne présente pas de difficulté mais doit être détaillée en commençant par une majoration de $|u(f)(x)|$ pour $x \in \mathrm{I}$.

7. Très peu réussie.

8. Il faut exploiter le fait que M soit une norme et citer ce fait. La continuité de v est peu abordée bien que la question ne soit pas si technique. La non équivalence des normes pouvait se vérifier à l'aide de la question 7 ou alors directement ce que plusieurs ont fait avec succès.

9. Peu abordée bien que le recours au théorème de Weierstrass soit assez flagrant. Ceux qui ont osé traité cette question l'ont globalement bien réussie.

10. Question pas si difficile hélas très peu réussie ce qui était fort dommageable pour la suite car de cette question dépendaient la plupart des suivantes. Ceux qui ont essayé de faire sans étape intermédiaire le calcul de $(u \circ v)(f)$ sans décomposer en $v(f)$ puis $u(v(f))$ avec $f \in \mathcal{E}$ ont presque systématiquement échoué.

11, 12. Très peu abordées. Se traitaient par densité de $\mathcal{P}$ dans $(\mathcal{E}, \mathrm{N})$.

13. Ainsi bien réussie. La réciproque Argsh peut être explicitée et sa régularité ainsi que les calculs de dérivées en découlent facilement.

14, 15. Quelques amorces.

16. Très peu abordée.

17. Des tentatives mais la permutation de symboles $\int$ et Σ n'a quasiment jamais été justifiée de manière satisfaisante. À revoir.

18, 19, 20. Presque plus aucun point accordé.