Préparation à l'interrogation n°14

1 Croissances comparées

Soient α, $\beta > 0$. On a

$$\frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \qquad x^\beta e^{-\alpha x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \qquad x^\alpha \ln(x)^\beta \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \qquad \frac{\ln(x)^\beta}{x^\alpha} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

2 Trigonométrie

1. $\sin(a)\cos(b) = \dfrac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}$
2. $\cos(t)^2 = \dfrac{1+\cos(2t)}{2}$

3 Calcul intégral

1. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$
2. $\displaystyle\int^x \mathrm{th}\,(t)\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}$

4 Formules

1. Inégalité de Taylor-Lagrange
2. $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \alpha^k$ avec $|\alpha| < 1$

5 Continuité, compacité, connexité

1. Caractérisation de la continuité d'une application $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$;
2. Pour $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ avec E de dimension finie, l'application u est continue ;
3. Théorème des bornes atteintes, théorème de Heine ;
4. Image directe d'un compact ou d'un connexe par arcs par une application continue ;
5. Résultats de compacité en dimension finie.

6 Réduction

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ avec E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

1. On a

$$\begin{aligned} u \text{ diagonalisable } &\iff \mathrm{E} = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u)} \mathrm{E}_\lambda(u) \\ &\iff \dim \mathrm{E} = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u)} \dim \mathrm{E}_\lambda(u) \\ &\iff \chi_u \text{ scindé et } \forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(u) \qquad \dim \mathrm{E}_\lambda(u) = m_\lambda(u) \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned} u \text{ diagonalisable } &\iff \pi_u \text{ scindé à racines simples} \\ &\iff \exists \mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] \text{ scindé à racines simples et annulateur de } u \end{aligned}$$

7 Exercice type

Feuille 53 Exercice 3.

8 Exercice type - Matrice de Gram

Soit E préhilbertien réel, $(u_1, \ldots, u_n) \in \mathrm{E}^n$ et $\mathrm{G} = \big(\langle u_i, u_j\rangle\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{G} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ puis l'équivalence

$$\mathrm{G} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff (u_1, \ldots, u_n) \text{ libre}$$

Corrigé : On a clairement $\mathrm{G} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Pour $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on trouve

$$\mathrm{X}^\top \mathrm{G} \mathrm{X} = \|\sum_{i=1}^n x_i u_i\|^2 \geqslant 0$$

Si $(u_1, \ldots, u_n)$ libre, on a $\sum_{i=1}^n x_i u_i \neq 0_\mathrm{E}$ pour $\mathrm{X} \neq 0$ d'où $\mathrm{X}^\top \mathrm{G} \mathrm{X} > 0$. Si $(u_1, \ldots, u_n)$ liée, il existe $\mathrm{X} \neq 0$ tel que $\sum_{i=1}^n x_i u_i = 0_\mathrm{E}$ d'où $\mathrm{X}^\top \mathrm{G} \mathrm{X} = 0$. On conclut

$$\boxed{\mathrm{G} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff (u_1, \ldots, u_n) \text{ libre}}$$

9 Exercice type

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire réelle. On pose

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \Phi_\mathrm{X}(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\mathrm{X}})$$

Montrer que Φ_X caractérise la loi de X.

Corrigé : Notons $\mathrm{X}(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ avec les x_k deux à deux distincts. Par transfert, on a

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \Phi_\mathrm{X}(t) = \sum_{k=1}^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx_k}\mathbb{P}(\mathrm{X} = x_k)$$

Par dérivation $\qquad \forall (t,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \qquad \Phi_\mathrm{X}^{(p)}(t) = \sum_{k=1}^n (\mathrm{i}x_k)^p \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx_k}\mathbb{P}(\mathrm{X} = x_k)$

D'où
$$\begin{pmatrix} \Phi_\mathrm{X}(0) \\ \vdots \\ \Phi_\mathrm{X}^{(n-1)}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \mathrm{i}x_1 & \ldots & \mathrm{i}x_n \\ \vdots & & \vdots \\ (\mathrm{i}x_1)^{n-1} & \ldots & (\mathrm{i}x_n)^{n-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbb{P}(\mathrm{X} = x_1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(\mathrm{X} = x_n) \end{pmatrix}$$

On a une matrice de Vandermonde inversible d'où la caractérisation de la loi de X.

10 Questions de cours

Espaces euclidiens, probabilités (début), développements en série entière usuels, graphes usuels.