Devoir en temps libre n°12

Problème

Soit n entier non nul. On note $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Les espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sont munis de leurs produits scalaires canoniques. On pose

$$\forall \mathrm{X} \in \mathrm{S}(0,1) \qquad \mathrm{H_X} = \mathrm{I}_n - 2\mathrm{X}\mathrm{X}^\top$$

Une matrice de la forme $\mathrm{H_X}$ avec $\mathrm{X} \in \mathrm{S}(0,1)$ est appelée *matrice de Householder*. On rappelle

$$\mathrm{S}(0,1) = \left\{\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{X}^\top\mathrm{X} = 1\right\}$$

Soit E euclidien, $f \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ et a, b des vecteurs de E, distincts et unitaires. On pose $u = a - b$ et σ la réflexion orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}\,(u)^\perp$.

1. Soit $\mathrm{X} \in \mathrm{S}(0,1)$. Établir $\mathrm{H_X} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ puis justifier que son application canoniquement associée h_x est une symétrie orthogonale.
2. Soit $\mathrm{X} \in \mathrm{S}(0,1)$. Préciser $\mathrm{H_X X}$ et $\mathrm{H_X Y}$ pour $\mathrm{Y} \in \mathrm{Vect}\,(\mathrm{X})^\perp$. En déduire précisément la nature de l'isométrie canoniquement associée à $\mathrm{H_X}$.
3. Pour $x \in \mathrm{E}$, déterminer une expression de $\sigma(x)$ puis déterminer une expression simple de $\sigma(a)$ en fonction de a et b.
4. On suppose $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$. Montrer que la matrice $\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\sigma$ est une matrice de Householder que l'on précisera.

   On se propose de montrer par récurrence sur n le résultat suivant : toute matrice de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est produit d'au plus n matrices de Householder.
5. Pour $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{X}^\top\mathrm{X} = 1$, montrer qu'il existe $\widetilde{\mathrm{X}} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $\widetilde{\mathrm{X}}^\top\widetilde{\mathrm{X}} = 1$ et $\mathrm{H}_{\widetilde{\mathrm{X}}} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{H_X}\end{array}\right)$.
6. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathrm{L} \\ \hline 0 & \mathrm{B}\end{array}\right)$ avec $\mathrm{L} \in \mathscr{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R})$.
   Établir $\mathrm{L} = 0$ et $\mathrm{B} \in \mathcal{O}_{n-1}(\mathbb{R})$.
7. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associé. On note e_1 le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On suppose $f(e_1) \neq e_1$. Déterminer une réflexion orthogonale σ telle que $\sigma \circ f(e_1) = e_1$.
8. Démontrer le résultat annoncé.
9. Justifier que l'application

$$\Phi : \begin{cases} \left(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \left\{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\right\}\right)^n \longrightarrow \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \\ (\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n) \longmapsto \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \mathrm{H}_{\mathrm{X}_i/\|\mathrm{X}_i\|} \end{cases}$$

   est continue. On pourra s'intéresser successivement aux applications suivantes

$$\mathrm{N} : \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \left\{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\right\} \to \mathrm{S}(0,1),\ \mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}/\|\mathrm{X}\|$$

$$\mathrm{H} : \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{X} \mapsto \mathrm{I}_n - 2\mathrm{X}\mathrm{X}^\top$$

et
$$\mathrm{P} : \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^n \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ (\mathrm{M}_1, \ldots, \mathrm{M}_n) \mapsto \prod_{k=1}^{n} \mathrm{M}_k$$

10. On suppose qu'on dispose d'une fonction `tirage()` qui renvoie aléatoirement un n-uplet dans $[-1\,;1]^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Proposer un algorithme qui génère aléatoirement une matrice orthogonale d'ordre n et qui dépende continument des résultats de la fonction `tirage()`.