Corrigé du devoir en temps libre n°11

Problème I

1. L'intégrale définissant $\langle P, Q\rangle$ pour $(P, Q) \in E^2$ est bien définie comme intégrale de fonction continue sur un segment. L'application $(P, Q) \mapsto \langle P, Q\rangle$ est clairement symétrique, linéaire par rapport à la première variable par linéarité du produit à droite et de l'intégrale. Pour $P \in E$, on a $\langle P, P\rangle = \displaystyle\int_0^\pi P(\cos(\theta))^2 \, d\theta \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale puisque l'intégrande est positif. Si $\langle P, P\rangle = 0$, comme $\theta \mapsto P(\cos(\theta))^2$ est continue positif sur $[\,0\,;\pi\,]$, il vient par séparation

$$\forall \theta \in [\,0\,;\pi\,] \qquad P(\cos(\theta)) = 0$$

L'application cos réalise une surjection de $[\,0\,;\pi\,]$ sur $[\,-1\,;1\,]$ d'où

$$\forall t \in [\,-1\,;1\,] \qquad P(t) = 0$$

Ainsi, le polynôme P admet une infinité de racines ce qui prouve sa nullité. On conclut

$$\boxed{\text{L'application } (P, Q) \mapsto \langle P, Q\rangle \text{ est un produit scalaire sur E.}}$$

2. Le sev F est de dimension finie. Par caractérisation géométrique du projeté orthogonal, on a $P = p_F(1) \in F$ d'où $P = aX + bX^2$ avec a, b réels et

$$1 - P \in F^\perp \iff \begin{cases} \langle 1 - P, X\rangle & = 0 \\ \langle 1 - P, X^2\rangle & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \langle X, X\rangle a + \langle X^2, X\rangle b & = \langle 1, X\rangle \\ \langle X, X^2\rangle a + \langle X^2, X^2\rangle b & = \langle 1, X^2\rangle \end{cases}$$

Tous calculs effectués (linéarisation ou transformation $\cos(t)^3 = (1 - \sin(t)^2)\cos(t)$ avec t réel), on obtient

$$\langle 1, X\rangle = 0, \quad \langle X, X\rangle = \langle 1, X^2\rangle = \frac{\pi}{2}, \quad \langle X, X^2\rangle = 0, \quad \langle X^2, X^2\rangle = \frac{3\pi}{8}$$

d'où le système

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\, a & = 0 \\ \dfrac{3\pi}{8}\, b & = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \iff (a, b) = \left(0, \frac{4}{3}\right)$$

Ainsi

$$\boxed{p_F(1) = \frac{4X^2}{3}}$$

3. Par caractérisation métrique du projeté orthogonal, le sev F étant de dimension finie, on trouve

$$d(1, F)^2 = \|1 - p_F(1)\|^2 = \langle 1, 1 - p_F(1)\rangle = \int_0^\pi \left[1 - \frac{4\cos(\theta)^2}{3}\right] d\theta = \frac{\pi}{3}$$

On conclut

$$\boxed{d(1, F) = \sqrt{\frac{\pi}{3}}}$$

Problème II

1. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. On a $t \mapsto \mathrm{P}(t)\mathrm{e}^{-t} \in \mathscr{C}_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux et par croissances comparées

$$\mathrm{P}(t)\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Par comparaison et critère de Riemann, on conclut

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \mathrm{P}(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \text{ converge pour tout } \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}].}$$

L'ensemble $\left\{\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 + \sum_{k=1}^{n} x_k t^k\right)^2 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t,\ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\right\}$ est non vide et minoré donc admet une borne inférieure finie.

2. L'application $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est clairement symétrique, linéaire par rapport à la première variable par linéarité de l'intégrale, la convergence ayant lieu. Pour $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{P}(t)^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale, l'intégrande étant positif. Enfin, soit $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$ tel que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{P}(t)^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 0$. L'application $t \mapsto \mathrm{P}(t)^2\mathrm{e}^{-t}$ est continue positive sur $\mathbb{R}_+$ donc, par séparation, il vient $\mathrm{P}(t)^2\mathrm{e}^{-t} = 0$ pour $t \geqslant 0$ d'où

$$\forall t \geqslant 0 \qquad \mathrm{P}(t) = 0$$

Ceci prouve que le polynôme P admet une infinité de racines et est donc le polynôme nul. En conclusion,

$$\boxed{\text{L'application } (\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \mapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \text{ est un produit scalaire sur E.}}$$

3. On a
$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \langle 1, \mathrm{X}^k \rangle = \Gamma(k+1)$$

où la fonction Γ est définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ pour $x > 0$. Par intégration par parties, on montre

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \qquad \langle 1, \mathrm{X}^k \rangle = k!}$$

4. Muni du produit scalaire défini sur E, on peut réinterpréter Δ_n par

$$\Delta_n = \underset{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n}{\mathrm{Inf}} \|1 - (-\sum_{k=1}^{n} x_k \mathrm{X}^k)\|^2$$

Notons $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{X}, \ldots, \mathrm{X}^n)$. On remarque que $\left\{(-\sum_{k=1}^{n} x_k \mathrm{X}^k),\ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\right\} = \mathrm{F}$. Ainsi, par croissance et continuité de $t \mapsto t^2$ sur $\mathbb{R}_+$, il vient

$$\Delta_n = \underset{\mathrm{P}\in\mathrm{F}}{\mathrm{Inf}} \|1 - \mathrm{P}\|^2 = \left(\underset{\mathrm{P}\in\mathrm{F}}{\mathrm{Inf}} \|1 - \mathrm{P}\|\right)^2$$

Comme l'ensemble F est un sev de dimension finie, la caractérisation métrique du projeté orthogonal donne l'existence et l'unicité de $\mathrm{P}_0 \in \mathrm{F}$ vérifiant $\underset{\mathrm{P}\in\mathrm{F}}{\mathrm{Inf}} \|1 - \mathrm{P}\| = \|1 - \mathrm{P}_0\|$ avec $\mathrm{P}_0 = p_{\mathrm{F}}(1)$.

Notant $\mathrm{P}_0 = -\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \mathrm{X}^k$ dont la décomposition dans la base $(\mathrm{X}, \ldots, \mathrm{X}^n)$ de F est unique, on a donc montré

$$\boxed{\exists!(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \qquad \Delta_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \sum_{k=1}^{n} a_k t^k\right)^2 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t}$$

En fait, on a

$$\Delta_n = \|1 - \mathrm{P}_0\|^2 = \langle 1 - \mathrm{P}_0, 1 - \mathrm{P}_0 \rangle = \langle 1 - \mathrm{P}_0, 1 \rangle - \langle \underbrace{1 - \mathrm{P}_0}_{\in \mathrm{F}^\perp}, \underbrace{\mathrm{P}_0}_{\in \mathrm{F}} \rangle = \langle 1 - \mathrm{P}_0, 1 \rangle$$

Par suite $$\boxed{\Delta_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \sum_{k=1}^{n} a_k t^k\right) \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1 + \sum_{k=1}^{n} k!\, a_k}$$

5. Rappelons que $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{X}, \ldots, \mathrm{X}^n)$. Par suite, il vient

$$1 - \mathrm{P}_0 \in \mathrm{F}^\perp \iff \forall j \in [\![1 \,; n]\!] \quad \langle 1 - \mathrm{P}_0, \mathrm{X}^j \rangle = 0$$

Pour $j \in [\![1 \,; n]\!]$, on a

$$\langle 1 - \mathrm{P}_0, \mathrm{X}^j \rangle = \int_0^{+\infty} \left(1 + \sum_{k=1}^{n} a_k t^k\right) t^j\,\mathrm{d}t = j! + \sum_{k=1}^{n} a_k (j+k)! = j! \times \mathrm{P}_n(j)$$

Il s'ensuit $$\boxed{\forall j \in [\![1 \,; n]\!] \qquad \mathrm{P}_n(j) = 0}$$

6. D'après le résultat de la question précédente, le polynôme $\prod\limits_{j=1}^{n} (j - \mathrm{X})$ divise P_n et par égalité de degrés, on en déduit qu'il existe λ réel non nul tel que

$$\mathrm{P}_n = \lambda \prod_{j=1}^{n} (j - \mathrm{X})$$

Enfin, on remarque que

$$\mathrm{P}_n(-1) = 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k (1-1) \times (k-1) = 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{P}_n(-1) = \lambda \prod_{j=1}^{n} (j+1) = \lambda (n+1)!$$

Autrement dit $$\boxed{\mathrm{P}_n = \frac{1}{(n+1)!} \prod_{j=1}^{n} (j - \mathrm{X})}$$

7. Par définition de P_n, on a $\mathrm{P}_n(0) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} k!\, a_k = \Delta_n$. D'après le résultat précédent, on conclut

$$\boxed{\Delta_n = \mathrm{P}_n(0) = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)}}$$