Feuille d'exercices n°52

Exercice 1 (**)

Établir les inégalités suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\sqrt{k} < \sqrt{2^n \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k}$
2. $\forall f \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R}) \qquad \left(\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \dfrac{2}{3}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{f^2(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$
3. $\forall (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![\,1\,;n\,]\!]^2} \in \mathbb{R}^{n^2} \qquad \left|\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| \leqslant n\sqrt{\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2}$

Corrigé : 1. Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^{n+1}$ muni du produit scalaire canonique, $x = \left(\sqrt{0\binom{n}{0}}, \sqrt{1\binom{n}{1}}, \ldots, \sqrt{n\binom{n}{n}}\right)$ et $y = \left(\sqrt{\binom{n}{0}}, \ldots, \sqrt{\binom{n}{n}}\right)$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\sqrt{k} \leqslant \|x\|\|y\| = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right)} = \sqrt{2^n \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k}$$

L'inégalité est une égalité si et seulement si (x, y) est liée ce qui n'est clairement pas le cas. On conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\sqrt{k} < \sqrt{2^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k}}$$

Remarque : On peut finaliser le calcul avec

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k = \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}n = n2^{n-1}$$

Variante : On peut aussi considérer $\mathrm{E} = \mathbb{R}^{n+1}$ muni du produit scalaire

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle x, y\rangle = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x_k y_k$$

et appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec $x = \left(\sqrt{0}, \sqrt{1}, \ldots, \sqrt{n}\right)$ et $y = (1, \ldots, 1)$.

2. On pose $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$ muni de

$$\forall (f, g) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle f, g\rangle = \int_0^1 \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

Soit $(f, g) \in \mathrm{E}^2$. On a $t \mapsto \dfrac{f(t)g(t)}{\sqrt{t}} \in \mathscr{C}_{pm}(]\,0\,;1\,],\mathbb{R})$ et comme f et g sont continues sur le segment $[\,0\,;1\,]$, il vient

$$\frac{f(t)g(t)}{\sqrt{t}} \underset{t\to 0}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

d'où l'existence de l'intégrale définissant $\langle f, g\rangle$ par comparaison et critère de Riemann. L'application $(f, g) \mapsto \langle f, g\rangle$ est symétrique, linéaire en la première variable par linéarité de l'intégrale et du produit à droite. Pour $f \in \mathrm{E}$, on a

$$\langle f, f\rangle = \int_0^1 \frac{f(t)^2}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

par positivité de l'intégrale. Puis, par séparation de l'intégrale avec $t \mapsto \dfrac{f(t)^2}{\sqrt{t}}$ positive et continue sur $]\,0\,;1\,]$, il vient

$$\langle f, f\rangle = 0 \iff \forall t \in\,]\,0\,;1\,] \qquad \frac{f(t)^2}{\sqrt{t}} = 0 \iff \forall t \in\,]\,0\,;1\,] \qquad f(t) = 0$$

Par continuité de f en 0, il s'ensuit que $f = 0_{\mathrm{E}}$. Ainsi, l'application $(f,g) \mapsto \langle f, g\rangle$ est un produit scalaire sur E. Avec $g(t) = \sqrt{t}$ pour $t \in [\,0\,;1\,]$, on obtient d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\langle f, g\rangle^2 = \left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \|f\|^2\|g\|^2 = \int_0^1 \frac{f^2(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \int_0^1 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t$$

On conclut $\boxed{\forall f \in \mathscr{C}([\,0\,;1\,], \mathbb{R}) \qquad \left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{f^2(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t}$

3. Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique. Avec $\mathrm{J} = (1)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on a avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\langle \mathrm{A}, \mathrm{J}\rangle| = \left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| \leqslant \|\mathrm{A}\|\|\mathrm{J}\| = \sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}}\sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} 1^2}$$

On conclut $\boxed{\forall (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![\,1\,;\,n\,]\!]^2} \in \mathbb{R}^{n^2} \qquad \left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| \leqslant n\sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2}}$

Exercice 2 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ muni de $\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q}\rangle = \sum_{k=-1}^{1} \mathrm{P}(k)\mathrm{Q}(k)$ pour $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathrm{E}^2$.

1. Justifier $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \mapsto \langle \mathrm{P}, \mathrm{Q}\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Construire une base orthonormée de E.

Corrigé : 1. L'application $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \mapsto \langle \mathrm{P}, \mathrm{Q}\rangle$ est clairement symétrique, linéaire en la première variable par linéarité du produit à droite et de la somme. Pour $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$, on a $\langle \mathrm{P}, \mathrm{P}\rangle = \sum_{k=-1}^{1} \mathrm{P}(k)^2 \geqslant 0$. Si $\langle \mathrm{P}, \mathrm{P}\rangle = 0$, comme $\sum_{k=-1}^{1} \mathrm{P}(k)^2$ est une somme de termes positifs, il vient $\mathrm{P}(k) = 0$ pour $k \in [\![\,-1\,;\,1\,]\!]$ d'où 3 racines distinctes pour P avec $\deg \mathrm{P} \leqslant 2$ ce qui prouve que P est nul. On conclut

$$\boxed{\text{L'application } (\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \mapsto \langle \mathrm{P}, \mathrm{Q}\rangle \text{ est un produit scalaire sur E.}}$$

2. On applique l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt et on trouve

$$\boxed{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{X}, \frac{\sqrt{6}}{2}\left(\mathrm{X}^2 - \frac{2}{3}\right)\right)}$$

Exercice 3 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle \mathrm{A}, \mathrm{B} \rangle = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^\top \mathrm{B})$. On note $\mathrm{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Justifier que F est un sev de E et en préciser une base.
2. Pour $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$, calculer $\mathrm{d}(\mathrm{M}, \mathrm{F})$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{F}^\perp$.

Corrigé : 1. Notons $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{V} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a clairement $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{U}, \mathrm{V})$ et par liberté de (U, V), on conclut

$$\boxed{\text{La famille } (\mathrm{U}, \mathrm{V}) \text{ est une base de F.}}$$

2. Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$. Le sev F est de dimension finie d'où, par caractérisation métrique du projeté orthogonal,

$$\mathrm{d}(\mathrm{M}, \mathrm{F}) = \|\mathrm{M} - p_{\mathrm{F}}(\mathrm{M})\|$$

On $p_{\mathrm{F}}(\mathrm{M}) \in \mathrm{F}$ d'où $p_{\mathrm{F}}(\mathrm{M}) = a\mathrm{U} + b\mathrm{V}$ avec a et b réels puis

$$\mathrm{M} - p_{\mathrm{F}}(\mathrm{M}) \in \mathrm{F}^\perp \iff \begin{cases} \langle \mathrm{M} - p_{\mathrm{F}}(\mathrm{M}), \mathrm{U} \rangle = 0 \\ \langle \mathrm{M} - p_{\mathrm{F}}(\mathrm{M}), \mathrm{V} \rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \langle \mathrm{U}, \mathrm{U} \rangle \, a + \langle \mathrm{U}, \mathrm{V} \rangle \, b &= \langle \mathrm{M}, \mathrm{U} \rangle \\ \langle \mathrm{U}, \mathrm{V} \rangle \, a + \langle \mathrm{V}, \mathrm{V} \rangle \, b &= \langle \mathrm{M}, \mathrm{V} \rangle \end{cases}$$

Pour $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathrm{E}$, on a

$$\langle \mathrm{M}, \mathrm{U} \rangle = x - t \qquad \langle \mathrm{M}, \mathrm{V} \rangle = y + z \qquad \langle \mathrm{U}, \mathrm{U} \rangle = \langle \mathrm{V}, \mathrm{V} \rangle = 2 \qquad \langle \mathrm{U}, \mathrm{V} \rangle = 0$$

d'où
$$\begin{cases} 2a = x - t \\ 2b = y + z \end{cases}$$

D'où $$\mathrm{M} - p_{\mathrm{F}}(\mathrm{M}) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} - \frac{x-t}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \frac{y+z}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x+t & y-z \\ z-y & x+t \end{pmatrix}$$

On trouve $$\boxed{\forall \mathrm{M} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{d}(\mathrm{M}, \mathrm{F}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(x+t)^2 + (y-z)^2}}$$

3. Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathrm{E}$. On a

$$\mathrm{E} \in \mathrm{F}^\perp \iff \langle \mathrm{M}, \mathrm{U} \rangle = \langle \mathrm{M}, \mathrm{V} \rangle = 0 \iff \begin{cases} x - t = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Il s'ensuit $$\boxed{\text{La famille } \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } \mathrm{F}^\perp.}$$

Exercice 4 (**)

Soit E préhilbertien réel et $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs normés de E telle que

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle^2 = \|x\|^2$$

Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E et que E est donc euclidien.

Corrigé : Notons $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_n)$. Pour $x \in \mathrm{F}^\perp$, on a $\|x\| = 0$ d'où $\mathrm{F}^\perp = \{0\}$ et par suite $\mathrm{F} = (\mathrm{F}^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = \mathrm{E}$ ce qui prouve que $(e_1, \ldots, e_n)$ est génératrice. Puis, pour $i \in [\![1\,;\, n]\!]$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \langle e_i, e_k\rangle^2 = \|e_i\|^2 \iff \underbrace{\|e_i\|^4}_{=1} + \sum_{k \in [\![1\,;\, n]\!] \smallsetminus \{i\}} \langle e_i, e_k\rangle^2 = \underbrace{\|e_i\|^2}_{=1} \iff \sum_{k \in [\![1\,;\, n]\!] \smallsetminus \{i\}} \langle e_i, e_k\rangle^2 = 0$$

Il s'ensuit que la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est orthonormée donc libre et on conclut

$$\boxed{\text{L'espace E est euclidien et } (e_1, \ldots, e_n) \text{ est une base orthonormée de E.}}$$

Exercice 5 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ avec n entier non nul.

1. Soit $a \in \mathrm{E}$ normé. Déterminer la matrice dans la base canonique de $p_{\mathrm{Vect}\,(a)}$ et $p_{\mathrm{Vect}\,(a)^\perp}$.
2. Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ orthonormée et $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$. Déterminer la matrice dans la base canonique de p_F.

Corrigé : 1. Soit $x \in \mathrm{E}$. Notons $\mathrm{P}_1 = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}} p_{\mathrm{Vect}\,(a)}$, $\mathrm{P}_2 = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}} p_{\mathrm{Vect}\,(a)^\perp}$, $\mathrm{A} = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}} a$ et $\mathrm{X} = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}} x$. On a

$$p_{\mathrm{Vect}\,(a)}(x) = \langle x, a\rangle a$$

Matriciellement $\qquad \forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \qquad \mathrm{P}_1\mathrm{X} = \langle \mathrm{X}, \mathrm{A}\rangle \mathrm{A} = \mathrm{A}(\mathrm{A}^\top \mathrm{X}) = \mathrm{A}\mathrm{A}^\top \mathrm{X}$

On trouve $\qquad \boxed{\mathrm{P}_1 = \mathrm{A}\mathrm{A}^\top \quad \text{et} \quad \mathrm{P}_2 = \mathrm{I}_n - \mathrm{P}_1 = \mathrm{I}_n - \mathrm{A}\mathrm{A}^\top}$

2. On a $\qquad \forall x \in \mathrm{E} \qquad p_\mathrm{F}(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, u_i\rangle\, u_i$

Matriciellement, on obtient $\qquad \boxed{\mathrm{P}_\mathrm{F} = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{U}_i {\mathrm{U}_i}^\top}$

Exercice 6 (*)

Soit E préhilbertien réel et $(a, b) \in \mathrm{E}^2$ tel que $\langle a, b\rangle = 1$. Décrire l'application définie par

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad f(x) = \langle x, a\rangle\, b$$

Corrigé : On a clairement $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}\,(a)^\perp$ et $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Vect}\,(b)$. La forme linéaire $x \mapsto \langle x, a\rangle$ est non nulle puisqu'elle ne s'annule pas en a et elle est par conséquent surjective. Ainsi, on a $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\,(b)$. Enfin, on constate

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad f^2(x) = f(\langle x, a\rangle\, b) = \langle x, a\rangle\, f(b) = \langle x, a\rangle\, \langle a, b\rangle\, b = f(x)$$

On conclut $\boxed{\text{L'application } f \text{ est le projecteur sur } \mathrm{Vect}\,(b) \text{ parallèlement à } \mathrm{Vect}\,(a)^\perp.}$

Exercice 7 (**)

Soit $\mathrm{F}_n = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ (n entier non nul) muni du produit scalaire $\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q}\rangle = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t$ pour $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathrm{F}_n^2$ et $(\pi_0, \ldots, \pi_n)$ la base orthonormée fournie par l'algorithme de Gram-Schmidt sur $(1, \mathrm{X}, \ldots, \mathrm{X}^n)$.

1. Montrer $\qquad \forall k \in [\![0\,;\, n]\!] \qquad \deg \pi_k = k$

   On admet que π_n est scindé dans F_n à racines simples $x_1, \ldots, x_n$.

2. Montrer $\exists!(\lambda_k)_{k\in[\![1\,;\, n]\!]} \in \mathbb{R}^n \quad | \quad \forall \mathrm{P} \in \mathrm{F}_{n-1} \qquad \displaystyle\int_0^1 \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathrm{P}(x_k)$

3. Vérifier que l'égalité précédente est encore vraie pour tout $\mathrm{P} \in \mathrm{F}_{2n-1}$.

Corrigé : 1. On a clairement $\deg \pi_0 = \deg 1 = 0$. Soit $k \in [\![1\,;\, n]\!]$. L'étape itérative de l'algorithme consiste à construire

$$\mathrm{P}_k = \mathrm{X}^k - \sum_{j=0}^{k-1} \langle \mathrm{X}^k, \pi_j\rangle \pi_j \quad \text{et} \quad \pi_k = \frac{\mathrm{P}_k}{\|\mathrm{P}_k\|}$$

Comme $\mathrm{Vect}\,(1, \ldots, \mathrm{X}^{k-1}) = \mathrm{Vect}\,(\pi_0, \ldots, \pi_{k-1})$, il s'ensuit que

$$\deg \mathrm{P}_k = \deg \Big(\mathrm{X}^k - \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} \langle \mathrm{X}^k, \pi_j\rangle \pi_j}_{\in \mathbb{R}_{k-1}[\mathrm{X}]}\Big) = k \quad \text{et} \quad \deg \pi_k = \deg \mathrm{P}_k$$

On conclut $\qquad \boxed{\forall k \in [\![0\,;\, n]\!] \qquad \deg \pi_k = k}$

2. Notons $(\mathrm{L}_i)_{i\in[\![1\,;\, n]\!]}$ la famille de polynômes d'interpolations de Lagrange associés à $(x_1, \ldots, x_n)$. On a donc

$$\forall (i, j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2 \qquad \mathrm{L}_i(\lambda_j) = \delta_{i,j}$$

• **Analyse :** Supposons qu'il existe des scalaires λ_k tels qu'on ait la propriété souhaitée. En particulier

$$\forall i \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad \int_0^1 \mathrm{P}_i(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathrm{L}_i(x_k) = \lambda_i$$

ce qui prouve l'unicité sous réserve d'existence.

• **Synthèse :** Les formes linéaires $\varphi : \mathrm{P} \mapsto \displaystyle\int_0^1 \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t$ et $\psi : \mathrm{P} \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathrm{P}(x_k)$ coïncident sur une base (la base des polynômes interpolateurs) donc coïncident par caractérisation d'applications linéaires sur une base. Ainsi

$$\boxed{\exists!(\lambda_k)_{k\in[\![1\,;\, n]\!]} \in \mathbb{R}^n \quad | \quad \forall \mathrm{P} \in \mathrm{F}_{n-1} \qquad \int_0^1 \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathrm{P}(x_k)}$$

3. On prolonge la définition de φ et ψ à F_{2n-1}. Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{F}_{2n-1}$. D'après le théorème de la division euclidienne

$$\exists!(\mathrm{Q}, \mathrm{R}) \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \quad \text{avec} \quad \deg \mathrm{R} < n \quad | \quad \mathrm{P} = \pi_n \times \mathrm{Q} + \mathrm{R}$$

On a $\deg \pi_n \times \mathrm{Q} = \deg \pi_n + \deg \mathrm{Q} = \deg(\mathrm{P} - \mathrm{R}) \leqslant 2n - 1$ d'où $\deg \mathrm{Q} \leqslant 2n - 1 - n = n - 1$ et par conséquent $\mathrm{Q} \perp \pi_n$. En exploitant le résultat de la question précédente, on obtient

$$\varphi(\mathrm{P}) = \underbrace{\langle \pi_n, \mathrm{Q}\rangle}_{=0} + \varphi(\mathrm{R}) = \psi(\mathrm{R}) = \underbrace{\psi(\pi_n \times \mathrm{Q})}_{=0} + \psi(\mathrm{R}) = \psi(\pi_n \times \mathrm{Q} + \mathrm{R})$$

Ainsi $$\boxed{\exists!(\lambda_k)_{k\in[\![1\,;\,n]\!]} \in \mathbb{R}^n \quad | \quad \forall \mathrm{P} \in \mathrm{F}_{2n-1} \qquad \int_0^1 \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathrm{P}(x_k)}$$

Exercice 8 (**)

Soit E préhilbertien réel et p projecteur de E. Montrer

$$p \text{ orthogonal} \iff \forall x \in \mathrm{E} \qquad \langle p(x), x\rangle \geqslant 0$$

Corrigé : Supposons p orthogonal, c'est-à-dire $\mathrm{Im}\, p \perp \mathrm{Ker}\, p$. Pour $x \in \mathrm{E}$, on a $\langle p(x), x - p(x)\rangle = 0$ puisque $p(x) \in \mathrm{Im}\, p$ et $x - p(x) \in \mathrm{Ker}\, p$ puis on obtient

$$\langle p(x), x\rangle = \langle p(x), p(x) + x - p(x)\rangle = \|p(x)\|^2 + \langle p(x), x - p(x)\rangle = \|p(x)\|^2 \geqslant 0$$

Réciproquement, Soit $x \in \mathrm{E}$ et $y \in \mathrm{Ker}\, p$. On a

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \langle p(x+ty), x+ty\rangle = \langle p(x), x+ty\rangle = \langle p(x), x\rangle + t\,\langle p(x), y\rangle \geqslant 0$$

La fonction affine $t \mapsto \langle p(x), x\rangle + t\,\langle p(x), y\rangle$ est positive ce qui impose $\langle p(x), y\rangle = 0$. Ainsi, on a $\mathrm{Im}\, p \perp \mathrm{Ker}\, p$. On conclut

$$\boxed{p \text{ orthogonal} \iff \forall x \in \mathrm{E} \qquad \langle p(x), x\rangle \geqslant 0}$$

Exercice 9 (**)

Soit E préhilbertien réel et F sev de E. Montrer que $\mathrm{F}^\perp = \bar{\mathrm{F}}^\perp$.

Corrigé : On a $\mathrm{F} \subset \bar{\mathrm{F}}$ d'où $\bar{\mathrm{F}}^\perp \subset \mathrm{F}^\perp$. Considérons $x \in \mathrm{F}^\perp$ et $y \in \bar{\mathrm{F}}$. Par caractérisation séquentielle, il existe $(y_n)_n \in \mathrm{F}^{\mathbb{N}}$ telle que $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$. L'application $u \mapsto \langle x, u\rangle$ est continue car linéaire et $\|x\|$-lipschitzienne d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Ainsi, on a

$$\langle x, y_n\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle x, y\rangle \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \langle x, y_n\rangle = 0$$

d'où $$\forall (x,y) \in \mathrm{F}^\perp \times \bar{\mathrm{F}} \qquad \langle x, y\rangle = 0$$

ce qui prouve $\mathrm{F}^\perp \subset \bar{\mathrm{F}}^\perp$ et on conclut

$$\boxed{\mathrm{F}^\perp = \bar{\mathrm{F}}^\perp}$$

Exercice 10 (**)

Justifier l'existence puis calculer $\displaystyle\operatorname*{Inf}_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 \left(1 + at + bt^2\right)^2 \,\mathrm{d}t$.

Corrigé : Notons $$\Lambda = \left\{\int_0^1 (1 + at + bt^2)^2\,\mathrm{d}t, (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

C'est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et minorée donc elle admet une borne inférieure finie. On pose $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ muni du produit scalaire $\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q}\rangle = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t$ pour $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathrm{E}^2$ et on note $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$. En utilisant notamment la croissance et continuité de $u \mapsto u^2$ sur $\mathbb{R}_+$

$$\text{Inf}\ \Lambda = \underset{(a,b)\in\mathbb{R}^2}{\text{Inf}} \|1 + a\text{X} + b\text{X}^2\|^2 = \left(\underset{(a,b)\in\mathbb{R}^2}{\text{Inf}} \|1 - (-a\text{X} - b\text{X}^2)\|\right)^2 = \text{d}(1,\text{F})^2$$

Comme le sev F est de dimension finie, on a par caractérisation métrique du projeté orthogonal

$$\text{d}(1,\text{F}) = \|1 - p_{\text{F}}(1)\|$$

Par caractérisation géométrique du projeté orthogonal, il vient pour $\text{P} \in \text{E}$

$$\text{P} = p_{\text{F}}(1) \iff \begin{cases} \text{P} \in \text{F} \\ 1 - \text{P} \in \text{F}^{\perp} \end{cases} \iff \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad \begin{cases} \text{P} = \alpha\text{X} + \beta\text{X}^2 \\ \langle 1 - \text{P}, \text{X}\rangle = 0 \\ \langle 1 - \text{P}, \text{X}^2\rangle = 0 \end{cases}$$

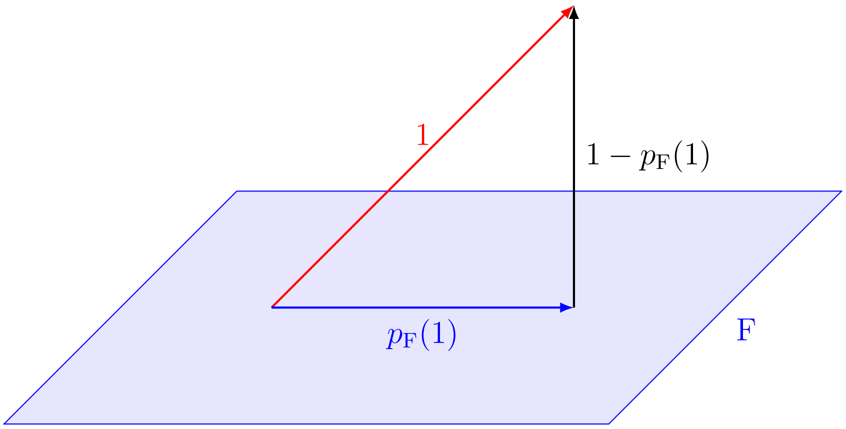

FIGURE 1 – Distance à un sev de dimension finie

Ainsi, les scalaires α, β sont solutions de

$$\begin{cases} \langle \text{X},\text{X}\rangle\alpha + \langle \text{X}^2,\text{X}\rangle\beta = \langle 1,\text{X}\rangle \\ \langle \text{X},\text{X}^2\rangle\alpha + \langle \text{X}^2,\text{X}^2\rangle\beta = \langle 1,\text{X}^2\rangle \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{\alpha}{3} + \dfrac{\beta}{4} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\alpha}{4} + \dfrac{\beta}{5} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \iff (\alpha,\beta) = \left(4, -\frac{10}{3}\right)$$

Enfin $$\|1 - p_{\text{F}}(1)\|^2 = \langle 1 - p_{\text{F}}(1), 1\rangle = \int_0^1 \left(1 - 4t + \frac{10}{3}t^2\right)\,\text{d}t$$

On conclut $$\boxed{\underset{(a,b)\in\mathbb{R}^2}{\text{Inf}} \int_0^1 (1 + at + bt^2)^2\,\text{d}t = \frac{1}{9}}$$

Exercice 11 (**)

Soit E préhilbertien réel. Pour $(u_1,\ldots,u_n) \in \text{E}^n$, on note $\text{G}(u_1,\ldots,u_n)$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\text{G}(u_1,\ldots,u_n) = \big(\langle u_i, u_j\rangle\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Soit $(x_1,\ldots,x_n) \in \text{E}^n$ libre et $\text{F} = \text{Vect}\,(x_1,\ldots,x_n)$.

Établir $$\forall x \in \text{E} \qquad \text{d}(x,\text{F})^2 = \frac{\det\left(\text{G}(x,x_1,\ldots,x_n)\right)}{\det\left(\text{G}(x_1,\ldots,x_n)\right)}$$

Corrigé : Soit $x \in \text{E}$. On décompose $x = a + b$ avec $(a,b) \in \text{F} \times \text{F}^{\perp}$. D'après le théorème de Pythagore, on a $\langle x,x\rangle = \langle a,a\rangle + \langle b,b\rangle$ puis $\langle x,x_i\rangle = \langle x_i,a\rangle$ pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$. Avec

$$\mathrm{G}(x,x_1,\ldots,x_n)=\begin{pmatrix}\langle x,x\rangle & \langle x,x_1\rangle & \ldots & \langle x,x_n\rangle\\ \langle x_1,x\rangle & \langle x_1,x_1\rangle & \ldots & \langle x_1,x_n\rangle\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \langle x_n,x\rangle & \langle x_n,x_1\rangle & \ldots & \langle x_n,x_n\rangle\end{pmatrix}$$

et notant $a=\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i$ avec les a_i réels, il vient

$$\det\left(\mathrm{G}(x,x_1,\ldots,x_n)\right)=\begin{vmatrix}\|b\|^2+\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\langle a,x_i\rangle & \langle a,x_1\rangle & \ldots & \langle a,x_n\rangle\\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\langle x_1,x_i\rangle & \langle x_1,x_1\rangle & \ldots & \langle x_1,x_n\rangle\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\langle x_n,x_i\rangle & \langle x_n,x_1\rangle & \ldots & \langle x_n,x_n\rangle\end{vmatrix}$$

et avec l'opération $\mathrm{C}_1\leftarrow\mathrm{C}_1-\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\mathrm{C}_{i+1}$, on obtient

$$\det\left(\mathrm{G}(x,x_1,\ldots,x_n)\right)=\|b\|^2\det\left(\mathrm{G}(x_1,\ldots,x_n\right)=\mathrm{d}(x,\mathrm{F})^2\det\mathrm{G}(x_1,\ldots,x_n))$$

On conclut $\boxed{\forall x\in\mathrm{E}\qquad \mathrm{d}(x,\mathrm{F})^2=\dfrac{\det\left(\mathrm{G}(x,x_1,\ldots,x_n)\right)}{\det\left(\mathrm{G}(x_1,\ldots,x_n)\right)}}$