ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°53

Exercice 1 (***)

Soit E euclidien de dimension n.

1. Montrer qu'il existe $x_1, \ldots, x_{n+1}$ dans E tels que
$$\forall (i,j) \in [\![1 \,;\, n+1]\!]^2 \quad \text{avec} \quad i \neq j \qquad \langle x_i, x_j \rangle < 0$$
2. Soient $x_1, \ldots, x_p$ dans E vérifiant
$$\forall (i,j) \in [\![1 \,;\, p]\!]^2 \quad \text{avec} \quad i \neq j \qquad \langle x_i, x_j \rangle < 0$$
   (a) Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ réels tels que $\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i x_i = 0$. Montrer $\sum\limits_{i=1}^{p} |\alpha_i|\, x_i = 0$.
   (b) Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{R})$ vérifiant $f(x_i) > 0$ pour tout $i \in [\![1 \,;\, p]\!]$. Montrer que $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre.
   (c) En déduire $p \leqslant n+1$.

Corrigé : 1. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Pour des raisons de symétrie et après expérimentation et dessin dans le cas $n = 2$, on cherche les x_i de la forme $x_{n+1} = -\lambda \sum\limits_{i=1}^{n} e_i$ et $x_i = e_i + x_{n+1}$ pour $i \in [\![1 \,;\, n]\!]$.

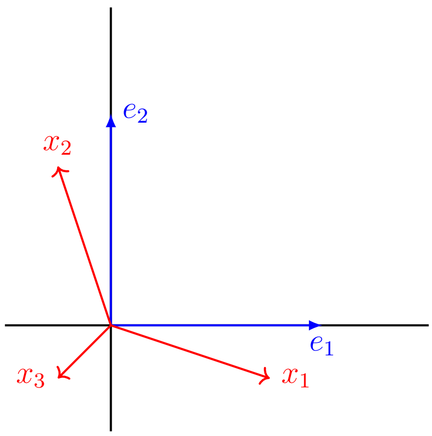

FIGURE 1 – Famille obtusangle dans $\mathbb{R}^2$

Pour $(i,j) \in [\![1 \,;\, n]\!]^2$ avec $i \neq j$, on trouve
$$\langle x_i, x_j \rangle = \langle e_i, e_j \rangle + \langle e_i, x_{n+1} \rangle + \langle e_j, x_{n+1} \rangle + \|x_{n+1}\|^2 = -2\lambda + n\lambda^2$$
et
$$\langle x_i, x_{n+1} \rangle = \langle e_i, x_{n+1} \rangle + \|x_{n+1}\|^2 = -\lambda + n\lambda^2$$
Ceci impose $\lambda \in \left] 0 \,;\, \dfrac{2}{n} \right[$ et $\lambda \in \left] 0 \,;\, \dfrac{1}{n} \right[$. Ainsi, pour $\lambda \in \left] 0 \,;\, \dfrac{1}{n} \right[$, on a
$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1 \,;\, n+1]\!]^2 \quad \text{avec} \quad i \neq j \qquad \langle x_i, x_j \rangle < 0}$$

Remarque : Une telle famille est dite *obtusangle*.

2.(a) On a $$\|\sum_{i=1}^{p} |\alpha_i|\, x_i\|^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant p} |\alpha_i\alpha_j|\, \langle x_i, x_j\rangle$$

Comme $\langle x_i, x_j\rangle < 0$, pour $i \neq j$, il vient pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\,p]\!]^2$

$$\alpha_i\alpha_j \leqslant |\alpha_i\alpha_j| \quad\Longrightarrow\quad \alpha_i\alpha_j \langle x_i, x_j\rangle \geqslant |\alpha_i\alpha_j| \langle x_i, x_j\rangle$$

Après sommation, on obtient

$$\|\sum_{i=1}^{p}\alpha_i x_i\|^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant p} \alpha_i\alpha_j \langle x_i, x_j\rangle \geqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant p} |\alpha_i\alpha_j| \langle x_i, x_j\rangle = \|\sum_{i=1}^{p} |\alpha_i|\, x_i\|^2$$

On conclut $$\boxed{\sum_{i=1}^{p} |\alpha_i|\, x_i = 0}$$

2.(b) Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ réels tels que $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i x_i = 0$. D'après le résultat de la question précédente, on a $\sum_{i=1}^{p} |\alpha_i|\, x_i = 0$ puis, par linéarité de f

$$f\left(\sum_{i=1}^{p} |\alpha_i|\, x_i\right) = \sum_{i=1}^{p} |\alpha_i|\, \underbrace{f(x_i)}_{>0} = 0$$

On en déduit clairement la nullité des α_i et on conclut

$$\boxed{\text{S'il existe } f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathbb{R}) \text{ telle que } f(x_i) > 0 \text{ pour tout } i \in [\![1\,;\,p]\!], \text{ alors } (x_1, \ldots, x_p) \text{ est libre.}}$$

2.(c) On suppose $p > 1$ sinon c'est trivial. On pose $f(x) = -\langle x, x_p\rangle$ pour $x \in \mathrm{E}$. On a clairement $f(x_i) > 0$ pour tout $i \in [\![1\,;\,p-1]\!]$ et $(x_1, \ldots, x_{p-1})$ est obtusangle. D'après le résultat de la question précédente, c'est une famille libre et on conclut

$$\boxed{p \leqslant n+1}$$

Exercice 2 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ muni de $\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q}\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t$ pour $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathrm{E}^2$.

1. Justifier $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \mapsto \langle \mathrm{P}, \mathrm{Q}\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Déterminer une base orthonormée (π_0, π_1, π_2) de E.
3. Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$ avec $\|\mathrm{P}\| = 1$. Montrer que $|\mathrm{P}(t)| \leqslant \sqrt{\sum_{i=0}^{2}\pi_i^2(t)}$ pour tout t réel.
4. En déduire que pour tout $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$ avec $\|\mathrm{P}\| = 1$, on a $\|\mathrm{P}\|_{\infty,[-1\,;1]} \leqslant \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Corrigé : 1. Classique.

2. On trouve $$\boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\mathrm{X}, \sqrt{\frac{45}{9}}\left(\mathrm{X}^2 - \frac{1}{3}\right)\right)}$$

3. Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$ avec $\|\mathrm{P}\| = 1$. On a $\mathrm{P} = \sum_{i=0}^{2} \langle \mathrm{P}, \pi_i\rangle\, \pi_i$ puis, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{P}(t)^2 \leqslant \left(\sum_{i=0}^{2} \langle \mathrm{P}, \pi_i\rangle^2\right)\left(\sum_{i=0}^{2}\pi_i(t)^2\right)$$

D'où $$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \qquad |\mathrm{P}(t)| \leqslant \sqrt{\sum_{i=0}^{2} \pi_i^2(t)}}$$

4. On a $$\forall t \in [\,-1\,;1\,] \qquad \sum_{i=0}^{2} \pi(t)^2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}t^2 + \frac{45}{8}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)^2$$

On pose $$\mathrm{P} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{X} + \frac{45}{8}\left(\mathrm{X} - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{9}{8}\,(5\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} + 1)$$

La fonction $t \mapsto \mathrm{P}(t)$ atteint sont maximum sur $[\,0\,;1\,]$ en $t = 1$ et on conclut

$$\boxed{\forall \mathrm{P} \in \mathrm{S}(0,1) \qquad \|\mathrm{P}\|_{\infty,[\,-1\,;1\,]} \leqslant \frac{3\sqrt{2}}{2}}$$

Exercice 3 (**)

Soit E préhilbertien réel, n entier non nul, une famille de vecteurs $(u_1, \ldots, u_n) \in \mathrm{E}^n$ et une matrice $\mathrm{G} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\mathrm{G} = \big(\langle u_i, u_j\rangle\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

1. Montrer qu'il existe $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ avec $p \leqslant n$ telle que $\mathrm{G} = \mathrm{A}^\top\mathrm{A}$.
2. Justifier l'égalité $\qquad \forall \mathrm{M} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \qquad \mathrm{rg}\,\big(\mathrm{M}^\top\mathrm{M}\big) = \mathrm{rg}\,(\mathrm{M})$
3. En déduire une relation entre $\mathrm{rg}\,(\mathrm{G})$ et $\mathrm{rg}\,(u_1, \ldots, u_n)$.

Corrigé : 1. Si les u_i sont tous nuls, le résultat est trivial. Notons $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_n)$. L'espace F est euclidien et admet une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ avec $p \leqslant n$. Par suite

$$\forall (i,j) \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]^2 \qquad \langle u_i, u_j\rangle = \langle \sum_{k=1}^{p} \langle u_i, e_k\rangle e_k, \sum_{\ell=1}^{p} \langle u_j, e_\ell\rangle e_\ell \rangle = \sum_{k=1}^{p} \langle u_i, e_k\rangle\langle u_j, e_k\rangle$$

Ainsi, notant $\mathrm{A} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u_1, \ldots, u_n) = \big(\langle u_j, e_i\rangle\big)_{(i,j) \in [\![\,1\,;\,p\,]\!] \times [\![\,1\,;\,n\,]\!]}$, on conclut

$$\boxed{\mathrm{G} = \mathrm{A}^\top\mathrm{A}}$$

2. Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. On clairement $\mathrm{Ker}\ \mathrm{M} \subset \mathrm{Ker}\ \mathrm{M}^\top\mathrm{M}$. Soit $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{M}^\top\mathrm{M}\mathrm{X} = 0$. En multipliant à gauche par $\mathrm{X}^\top$, on obtient

$$\mathrm{X}^\top\mathrm{M}^\top\mathrm{M}\mathrm{X} = \langle \mathrm{MX}, \mathrm{MX}\rangle = 0$$

d'où $\mathrm{MX} = 0$ et l'inclusion $\mathrm{Ker}\ \mathrm{M}^\top\mathrm{M} \subset \mathrm{Ker}\ \mathrm{M}$. Le théorème du rang appliqué M et $\mathrm{M}^\top\mathrm{M}$ donne alors

$$\dim \mathbb{R}^n = \dim \mathrm{Ker}\ \mathrm{M} + \mathrm{rg}\,(\mathrm{M}) \qquad \dim \mathbb{R}^n = \dim \mathrm{Ker}\ \mathrm{M}^\top\mathrm{M} + \mathrm{rg}\,\big(\mathrm{M}^\top\mathrm{M}\big)$$

On conclut $$\boxed{\mathrm{rg}\,(\mathrm{M}) = \mathrm{rg}\,\big(\mathrm{M}^\top\mathrm{M}\big)}$$

3. D'après les résultats précédemment établis, on conclut

$$\boxed{\mathrm{rg}\,(\mathrm{G}) = \mathrm{rg}\,\big(\mathrm{A}^\top\mathrm{A}\big) = \mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) = \mathrm{rg}\,(u_1, \ldots, u_n)}$$

Exercice 4 (***)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de sa structure euclidienne canonique, $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang égal à p et $\mathrm{B} \in \mathrm{E}$. Montrer qu'il existe un unique $\mathrm{X}_0 \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ rendant minimum $\|\mathrm{AX} - \mathrm{B}\|^2$ et préciser ce X_0.

Corrigé : On ne sait pas *a priori* qu'il s'agit d'un minimum. Considérons $\displaystyle\operatorname*{Inf}_{\mathrm{X}\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \|\mathrm{AX} - \mathrm{B}\|^2$.
On a $\{\mathrm{AX}, \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})\} = \mathrm{Im}\ \mathrm{A}$ d'où, par continuité et croissance de $t \mapsto t^2$ sur $\mathbb{R}_+$

$$\operatorname*{Inf}_{\mathrm{X}\in\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})} \|\mathrm{AX} - \mathrm{B}\|^2 = \left(\operatorname*{Inf}_{\mathrm{X}\in\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})} \|\mathrm{AX} - \mathrm{B}\|\right)^2 = \left(\operatorname*{Inf}_{\mathrm{C}\in\mathrm{Im}\ \mathrm{A}} \|\mathrm{B} - \mathrm{C}\|\right)^2 = \mathrm{d}(\mathrm{B}, \mathrm{Im}\ \mathrm{A})^2$$

Le sev Im A est de dimension finie et par caractérisation métrique du projeté orthogonal, on a

$$\mathrm{d}(\mathrm{B}, \mathrm{Im}\ \mathrm{A}) = \|\mathrm{B} - p_{\mathrm{Im}\ \mathrm{A}}(\mathrm{B})\|$$

Comme $p_{\mathrm{Im}\ \mathrm{A}}(\mathrm{B}) \in \mathrm{Im}\ \mathrm{A}$, il existe donc $\mathrm{X}_0 \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $p_{\mathrm{Im}\ \mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \mathrm{AX}_0$ ce qui prouve que la borne inférieure cherchée est effectivement un minimum. L'élément X_0 solution de l'équation $p_{\mathrm{Im}\ \mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \mathrm{AX}$ d'inconnue $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ est unique par injectivité de $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{AX}$ puisque d'après le théorème du rang

$$\dim \mathbb{R}^p = \dim \mathrm{Ker}\ \mathrm{A} + \mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) \iff p = \dim \mathrm{Ker}\ \mathrm{A} + p \iff \dim \mathrm{Ker}\ \mathrm{A} = 0$$

D'après la caractérisation géométrique du projeté orthogonal, on a

$$\forall \mathrm{C} \in \mathrm{Im}\ \mathrm{A} \qquad \langle \mathrm{C}, \mathrm{B} - p_{\mathrm{Im}\ \mathrm{A}}(\mathrm{B})\rangle = 0$$

c'est-à-dire

$$\forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \qquad \langle \mathrm{AX}, \mathrm{B} - \mathrm{AX}_0\rangle = 0$$

Autrement dit, pour tout $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, on trouve $(\mathrm{AX})^\top(\mathrm{B} - \mathrm{AX}_0) = 0$ ce qui s'interprète, en munissant $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique

$$\forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \qquad \left\langle \mathrm{X}, \mathrm{A}^\top\mathrm{B} - \mathrm{A}^\top\mathrm{AX}_0\right\rangle_{\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})} = 0$$

La matrice colonne $\mathrm{A}^\top\mathrm{B} - \mathrm{A}^\top\mathrm{AX}_0$ est orthogonale à toute matrice colonne de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ donc à elle-même en particulier ce qui prouve que sa norme est nulle et qu'elle est donc nulle. On en déduit

$$\mathrm{A}^\top\mathrm{AX}_0 = \mathrm{A}^\top\mathrm{B}$$

Enfin, on sait que $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) = \mathrm{rg}\,(\mathrm{A}^\top\mathrm{A}) = p$ et comme $\mathrm{A}^\top\mathrm{A} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, cela signifie que $\mathrm{A}^\top\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$ et on conclut

$$\boxed{\mathrm{X}_0 = (\mathrm{A}^\top\mathrm{A})^{-1}\mathrm{A}^\top\mathrm{B} \quad \text{et} \quad \operatorname*{Min}_{\mathrm{X}\in\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})} \|\mathrm{AX} - \mathrm{B}\|^2 = \|\mathrm{A}(\mathrm{A}^\top\mathrm{A})^{-1}\mathrm{A}^\top\mathrm{B} - \mathrm{B}\|^2}$$

Remarque : On a $p_{\mathrm{Im}\ \mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \mathrm{AX}_0 = \mathrm{A}(\mathrm{A}^\top\mathrm{A})^{-1}\mathrm{A}^\top\mathrm{B}$ ce qui prouve que $\mathrm{A}(\mathrm{A}^\top\mathrm{A})^{-1}\mathrm{A}^\top$ est la matrice de la projection orthogonale $p_{\mathrm{Im}\ \mathrm{A}}$ dans la base canonique de E.

Exercice 5 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ avec n entier non nul muni de $\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q}\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t$ pour $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathrm{E}^2$. On note $(\pi_0, \ldots, \pi_n)$ la base orthonormée fournie par l'algorithme de Gram-Schmidt sur $(1, \mathrm{X} \ldots, \mathrm{X}^n)$.

1. Justifier que $\deg \pi_k = k$ pour tout $k \in [\![0\,;\,n]\!]$.
   Désormais, on fixe $j \in [\![1\,;\,n]\!]$.

2. En considérant $\langle 1, \pi_j \rangle$, montrer que π_j a au moins une racine d'ordre impair dans $]-1\,;1\,[$.

On note $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ les racines d'ordre impair de π_j dans $]-1\,;1\,[$ et $\mathrm{S} = \prod\limits_{i=1}^{m} (\mathrm{X} - \alpha_i)$.

3. En considérant $\langle \mathrm{S}, \pi_j \rangle$, montrer que π_j admet exactement j racines distinctes dans $]-1\,;1\,[$.

Corrigé : 1. On a clairement $\deg \pi_0 = \deg 1 = 0$. Soit $k \in [\![1\,;\, n]\!]$. L'étape itérative de l'algorithme consiste à construire

$$\mathrm{P}_k = \mathrm{X}^k - \sum_{j=0}^{k-1} \langle \mathrm{X}^k, \pi_j \rangle \pi_j \quad \text{et} \quad \pi_k = \frac{\mathrm{P}_k}{\|\mathrm{P}_k\|}$$

Comme $\mathrm{Vect}\,(1, \ldots, \mathrm{X}^{k-1}) = \mathrm{Vect}\,(\pi_0, \ldots, \pi_{k-1})$, il s'ensuit que

$$\deg \mathrm{P}_k = \deg \Big(\mathrm{X}^k - \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} \langle \mathrm{X}^k, \pi_j \rangle \pi_j}_{\in \mathbb{R}_{k-1}[\mathrm{X}]} \Big) = k \quad \text{et} \quad \deg \pi_k = \deg \mathrm{P}_k$$

On conclut $\boxed{\forall k \in [\![0\,;\, n]\!] \qquad \deg \pi_k = k}$

2. On a $1 = \sqrt{2}\pi_0$ d'où $\displaystyle\int_{-1}^{1} \pi_j(t)\,\mathrm{d}t = \langle 1, \pi_j \rangle = \sqrt{2}\langle \pi_0, \pi_j \rangle = 0$

Supposons que π_j n'ait pas de racine d'ordre impair dans $]-1\,;1\,[$. Cela signifierait que π_j est de signe constant sur $[-1\,;1\,]$ d'après le théorème de valeurs intermédiaires appliqué à $t \mapsto \pi_j(t)$ continue, les seules racines éventuelles étant d'ordre pair. En effet, soit α racine de π_j sur $]-1\,;1\,[$ d'ordre $2p$ avec p entier. On aurait $\pi_j(t) = (t-\alpha)^{2p}\mathrm{Q}(t)$ avec $\mathrm{Q}(\alpha) \neq 0$ et cette expression de π_j montre qu'il s'annule en α sans changer de signe. Comme $t \mapsto \pi_j(t)$ est continue, la propriété de séparation de l'intégrale donnerait alors $\pi_j(t) = 0$ pour tout $t \in [-1\,;1\,]$ d'où $\pi_j = 0_{\mathrm{E}}$ (infinité de racines) ce qui absurde puisque $\deg \pi_j = j \geqslant 1$. Par conséquent

$$\boxed{\text{Le polynôme } \pi_j \text{ a au moins une racine d'ordre impair dans }]-1\,;1\,[.}$$

3. On a $m \leqslant j$ puisque π_j admet moins de racines distinctes et *a fortiori* moins de racines distinctes d'ordre impair que son degré. Supposons $m < j$. On a alors

$$\mathrm{S} \in \mathbb{R}_m[\mathrm{X}] = \mathrm{Vect}\,(1, \ldots, \mathrm{X}^m) = \mathrm{Vect}\,(\pi_0, \ldots, \pi_m) \quad \text{et} \quad \pi_j \in \mathrm{Vect}\,(\pi_0, \ldots, \pi_m)^{\perp}$$

Par suite $\displaystyle\int_{-1}^{1} \pi_j(t)\mathrm{S}(t)\,\mathrm{d}t = \langle \pi_j, \mathrm{S} \rangle = 0$

Mais le polynôme $\pi_j \times \mathrm{S}$ n'admet que des racines d'ordre pair sur $]-1\,;1\,[$ et il est donc de signe constant sur $[-1\,;1\,]$, ce qui, par propriété de séparation de l'intégrale, entraîne que $\pi_j(t)\mathrm{S}(t) = 0$ pour tout $t \in [-1\,;1\,]$ d'où $\pi_j \times \mathrm{S} = 0$ ce qui est absurde puisque $\pi_j \neq 0_{\mathrm{E}}$ et $\mathrm{S} \neq 0_{\mathrm{E}}$ (puisque $m \geqslant 1$). Par conséquent, il en résulte que

$$\boxed{\text{On a l'égalité } m = j.}$$

On a donc établi que π_j de degré j admet j racines d'ordre impair. Comme la somme des ordres des racines ne peut dépasser $\deg \pi_j$ puisque ce n'est pas le polynôme nul, on en déduit que toutes les racines sont simples et ce sont exactement toutes les racines de π_j, autrement dit

$$\boxed{\text{Le polynôme } \pi_j \text{ admet exactement } j \text{ racines distinctes dans }]-1\,;1\,[.}$$

Exercice 6 (***)

On pose $\quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{P}_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(x^2-1)^n\right] \quad$ et $\quad \mathrm{U}_n = \sqrt{\dfrac{2n+1}{2}}\mathrm{P}_n$

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([-1\,;1\,],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ pour $(f,g) \in \mathrm{E}^2$.

1. Pour n entier, déterminer le degré et coefficient dominant de P_n puis calculer $\langle \mathrm{P}_n, \mathrm{X}^k\rangle$ avec $k \in [\![\, 0\,;\, n\,]\!]$.
2. En déduire que $(\mathrm{U}_n)_n$ est une famille orthonormale de E et que $\overline{\mathrm{Vect}\,(\mathrm{U}_n)_n} = \mathrm{E}$.

Corrigé : 1. Soit n entier. Notons $\mathrm{L}_n = (\mathrm{X}^2-1)^n$. On a

$$\mathrm{L}_n = \mathrm{X}^{2n} + \mathrm{Q}_n \quad \text{avec} \quad \deg \mathrm{Q}_n < 2n \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{P}_n = \frac{1}{2^n n!}\left[\frac{(2n)!}{n!}\mathrm{X}^n + \mathrm{Q}_n^{(n)}\right]$$

D'où
$$\boxed{\mathrm{P}_n = \frac{\binom{2n}{n}}{2^n}\mathrm{X}^n + \mathrm{R}_n \quad \text{avec} \quad \deg \mathrm{R}_n < n}$$

2. Soit n entier et $k \in [\![\, 0\,;\, n\,]\!]$. On a

$$\langle \mathrm{P}_n, \mathrm{X}^k\rangle = \frac{1}{2^n n!}\langle \mathrm{L}_n^{(n)}, \mathrm{X}^k\rangle = \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} \mathrm{L}_n^{(n)}(t)t^k\,\mathrm{d}t$$

En intégrant par parties, il vient

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{L}_n^{(n)}(t)t^k\,\mathrm{d}t = \Big[\mathrm{L}_n^{(n-1)}(t)t^k\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \mathrm{L}_n^{(n-1)}(t)(t^k)'\,\mathrm{d}t$$

Or, les réels 1 et -1 sont racines d'ordre n de L_n donc $\mathrm{L}_n^{(j)}(\pm 1) = 0$ pour $j \in [\![\, 0\,;\, n-1\,]\!]$. Par suite, le crochet s'annule et on a

$$\langle \mathrm{L}_n^{(n)}, \mathrm{X}^k\rangle = -\langle \mathrm{L}_n^{(n-1)}, (\mathrm{X}^k)'\rangle$$

Supposons $k \in [\![\, 0\,;\, n-1\,]\!]$. En itérant $k+1$ intégrations par parties, on obtient

$$\langle \mathrm{L}_n^{(n)}, \mathrm{X}^k\rangle = (-1)^{k+1}\langle \mathrm{L}_n^{(n-(k+1))}, (\mathrm{X}^k)^{(k+1)}\rangle = (-1)^{k+1}\langle \mathrm{L}_n^{(n-(k+1))}, 0\rangle = 0$$

Pour $k = n$, avec n intégrations par parties, il vient

$$\langle \mathrm{L}_n^{(n)}, \mathrm{X}^n\rangle = (-1)^n\langle \mathrm{L}_n^{(0)}, (\mathrm{X}^n)^{(n)}\rangle = (-1)^n n!\int_{-1}^{1}(t^2-1)^n\,\mathrm{d}t$$

Posons $\mathrm{I}_{m,n} = \displaystyle\int_{-1}^{1}(t+1)^m(t-1)^n\,\mathrm{d}t$ pour $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. En intégrant par parties, on trouve

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{I}_{m,n} = -\frac{n}{m+1}\mathrm{I}_{m+1,n-1}$$

puis
$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_{n,n} &= (-1)^n\frac{n!}{(n+1)\ldots(2n)}\mathrm{I}_{2n,0} \\ &= (-1)^n\frac{(n!)^2}{(2n)!} \times \int_{-1}^{1}(t+1)^{2n}\,\mathrm{d}t = (-1)^n\frac{(n!)^2}{(2n)!} \times \frac{2^{2n+1}}{2n+1}\end{aligned}$$

Ainsi
$$\boxed{\text{Pour } n \text{ entier} \quad \langle \mathrm{P}_n, \mathrm{X}^k\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } k \in [\![\, 0\,;\, n-1\,]\!] \\ \dfrac{2^n}{\binom{2n}{n}} \times \dfrac{2}{2n+1} & \text{si } k = n \end{cases}}$$

3. Notons $\mathrm{U}_n = \sqrt{\dfrac{2n+1}{2}}\mathrm{P}_n$ pour n entier. Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \neq n$. On peut supposer $m < n$ sans perte de généralité. D'après le résultat de la question précédente, on a

$$\forall k < n \qquad \langle \mathrm{P}_n, \mathrm{X}^k \rangle = 0 \iff \mathrm{P}_n \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]^\perp$$

Comme $\mathrm{P}_m \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$, il en résulte que $\mathrm{P}_n \perp \mathrm{P}_m$ pour $m < n$. Puis

$$\|\mathrm{U}_n\|^2 = \frac{2n+1}{2}\langle \mathrm{P}_n, \mathrm{P}_n \rangle = \frac{2n+1}{2}\left(\frac{\binom{2n}{n}}{2^n}\langle \mathrm{P}_n, \mathrm{X}^n \rangle + \langle \mathrm{P}_n, \mathrm{R}_n \rangle\right) = 1$$

Comme $\deg \mathrm{U}_n = n$ pour tout n entier, on a $\mathbb{R}[\mathrm{X}] = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{U}_n)_n$. Soit $f \in \mathrm{E}$. D'après le théorème d'approximation de Weierstrass, pour $\varepsilon > 0$, on dispose de $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{U}_n)_n$ tel que $\|f - \mathrm{P}\|_{\infty,[-1;1]} \leqslant \varepsilon$ d'où

$$\|f - \mathrm{P}\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} [f(t) - \mathrm{P}(t)]^2 \,\mathrm{d}t} \leqslant \varepsilon\sqrt{2}$$

Ainsi $\boxed{\text{La famille } (\mathrm{U}_n)_n \text{ est une famille orthonormale de E et } \overline{\mathrm{Vect}\,(\mathrm{U}_n)_n} = \mathrm{E}.}$

Exercice 7 (***)

Soit E l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, paires et 2π-périodiques. On pose :

$$\forall (f,g) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

On pose $\qquad c_0 : t \mapsto 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1 \qquad c_n : t \mapsto \sqrt{2}\cos(nt)$

1. Vérifier que $(f,g) \mapsto \langle f, g \rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Soit $f \in \mathrm{E}$. Montrer

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \quad : \quad \|f - \mathrm{P} \circ \cos\|_{\infty,[0;\pi]} \leqslant \varepsilon$$

3. Montrer que $(c_n)_n$ est une famille orthonormale de E et que $\overline{\mathrm{Vect}\,(c_n)_n} = \mathrm{E}$.

Corrigé : 1. Soit $(f,g) \in \mathrm{E}^2$. L'intégrale définissant $\langle f, g \rangle$ existe comme intégrale de fonction continue sur un segment. L'application $(f,g) \mapsto \langle f, g \rangle$ est symétrique, linéaire en la première variable par linéarité de l'intégrale et du produit, positive par positivité de l'intégrale. Soit $f \in \mathrm{E}$ telle que $\langle f, f \rangle = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(t)^2 \,\mathrm{d}t = 0$. L'application f^2 est continue positive d'où, par séparation de l'intégrale

$$\forall t \in [0;\pi] \qquad f(t) = 0$$

Par parité $\qquad \forall t \in [-\pi;0] \qquad f(t) = f(-t) = 0$

Enfin, par 2π-périodicité,

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f(t) = f(\underbrace{t - 2n\pi}_{\in[-\pi;\pi[}) = 0 \quad \text{avec} \quad n = \left\lfloor \frac{1}{2}\left(\frac{t}{\pi} + 1\right) \right\rfloor$$

$$\boxed{\text{L'application } (f,g) \mapsto \langle f, g \rangle \text{ est un produit scalaire sur E.}}$$

2. On a $f \circ \mathrm{Arccos} \in \mathscr{C}^0([-1;1], \mathbb{R})$. D'après le théorème de Weierstrass, il vient

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \quad : \quad \|f \circ \mathrm{Arccos} - \mathrm{P}\|_{\infty,[-1;1]} \leqslant \varepsilon$$

Comme la fonction Arccos réalise une bijection de $[-1\,;1]$ sur $[0\,;\pi]$, on conclut

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \quad : \quad \|f - \mathrm{P} \circ \cos\|_{\infty,[0\,;\pi]} \leqslant \varepsilon}$$

3. Sans difficulté, on a $\mathrm{P} \circ \cos \in \mathrm{E}$ pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. D'après ce qui précède, on a

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \quad : \quad \|f - \mathrm{P} \circ \cos\| = \sqrt{\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [f(t) - \mathrm{P} \circ \cos(t)]^2 \,\mathrm{d}t} \leqslant \sqrt{\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \varepsilon^2 \,\mathrm{d}t} = \varepsilon$$

or
$$\{\mathrm{P} \circ \cos,\ \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]\} = \mathrm{Vect}\,(\cos^n)_n$$

ce qui prouve donc $\overline{\mathrm{Vect}\,(\cos^n)_n} = \mathrm{E}$. Montrons l'inclusion $\mathrm{Vect}\,(\cos^n)_n \subset \mathrm{Vect}\,(c_n)_n$. Soit n entier et t réel. D'après l'identité d'Euler, il vient

$$\cos(t)^n = \left(\frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}kt}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-k)t} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(2k-n)t}$$

Comme il s'agit d'un réel, il vient en considérant la partie réelle du membre de droite et la parité de cos

$$\cos(t)^n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(|2k-n|\,t)$$

Par suite $\qquad \mathrm{Vect}\,(\cos^n)_n \subset \mathrm{Vect}\,(c_n)_n \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{E} = \overline{\mathrm{Vect}\,(\cos^n)_n} \subset \overline{\mathrm{Vect}\,(c_n)_n} \subset \mathrm{E}$

Enfin, on trouve

$$\langle c_0, c_0\rangle = 1 \qquad \langle \forall n \geqslant 1 \qquad \langle c_0, c_n\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sqrt{2}\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{n\pi}\,[\sin(nt)]_0^{\pi} = 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \langle c_n, c_n\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2\cos^2(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (1 + \cos(2nt))\,\mathrm{d}t = 1$$

et pour m, n des entiers non nuls et distincts

$$\begin{aligned}\langle c_n, c_m\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2\cos(nt)\cos(mt)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [\cos((n-m)t) + \cos((n+m)t)]\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin((n-m)t)}{n-m} + \frac{\sin((n+m)t)}{n+m}\right]_0^{\pi} = 0\end{aligned}$$

les dénominateurs étant bien non nuls puisque $m \neq n$ et $m + n > 0$. On conclut donc

$$\boxed{\text{La famille } (c_n)_n \text{ est une famille orthonormale de E et } \overline{\mathrm{Vect}\,(c_n)_n} = \mathrm{E}.}$$

Exercice 8 (***)

Soit E espace préhilbertien, $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre de E. On suppose

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x\rangle^2$$

1. Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E.
2. Montrer que les e_i sont unitaires.
3. Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Corrigé : 1. Posons $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_n)$. On a clairement $\mathrm{F}^{\perp} = \{0_{\mathrm{E}}\}$ d'où $\mathrm{F} = \mathrm{E}$ et par conséquent

$$\boxed{\text{La famille } (e_1, \ldots, e_n) \text{ est une base de E.}}$$

2. Soit $k \in [\![1\,;\, n]\!]$. On a

$$\|e_k\|^2 = \|e_k\|^4 + \sum_{i \in [\![1\,;\, n]\!] \smallsetminus \{k\}} \langle e_i, ek \rangle^2 \geqslant \|e_k\|^4 \quad \Longrightarrow \quad \|e_k\| \leqslant 1$$

Supposons qu'il existe $k \in [\![1\,;\, n]\!]$ tel que $\|e_k\| < 1$. Pour $x \in \mathrm{Vect}\,(e_i)^{\perp}_{i \in [\![1\,;\, n]\!] \smallsetminus \{k\}}$ avec $x \neq 0_{\mathrm{E}}$ (choix possible dans un hyperplan), on a

$$\|x\|^2 = \langle x, e_k \rangle^2 \leqslant \|x\|^2 \|e_k\|^2 < \|x\|^2$$

ce qui est absurde. Il s'ensuit que $\|e_k\| \geqslant 1$ pour tout $k \in [\![1\,;\, n]\!]$ d'où

$$\boxed{\forall i \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad \|e_i\| = 1}$$

3. Soit $k \in [\![1\,;\, n]\!]$. On a

$$\|e_k\|^2 = \|e_k\|^4 + \sum_{i \in [\![1\,;\, n]\!] \smallsetminus \{k\}} \langle e_i, ek \rangle^2 \geqslant \|e_k\|^4 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i \in [\![1\,;\, n]\!] \smallsetminus \{k\}} \langle e_i, ek \rangle^2 = 0$$

On conclut $\boxed{\text{La famille } (e_1, \ldots, e_n) \text{ est une base orthonormée de E.}}$