

Formulaire (non exhaustif)

1 Inégalités triangulaires et caractère lipschitzien

Pour $(x, y) \in \mathbb{K}^2$, on a

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad |x - y| \leq |x| + |y| \quad ||x| - |y|| \leq |x - y|$$

Pour $z \in \mathbb{C}$, on a $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z| \quad |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$

d'où pour $(u, v) \in \mathbb{C}^2$

$$|\operatorname{Re}(u) - \operatorname{Re}(v)| = |\operatorname{Re}(u - v)| \leq |u - v| \quad |\operatorname{Im}(u) - \operatorname{Im}(v)| = |\operatorname{Im}(u - v)| \leq |u - v|$$

2 Nombres complexes

Soit θ réel et n entier. On a

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \quad \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$(e^{i\theta})^n = (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = e^{in\theta}$$

Soit n entier non nul. On a $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\}$

On a $\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega) = X^n - 1 \quad \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = \delta_{n,1} \quad \text{et} \quad \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = (-1)^{n-1}$

3 Croissances comparées

Théorème 1. Soient $\alpha, \beta > 0$. On a

$$\frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \quad x^\beta e^{-\alpha x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad x^\alpha \ln(x)^\beta \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \quad \frac{\ln(x)^\beta}{x^\alpha} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

4 Trigonométrie

Soient t, a, b réels.

1. $\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$;
2. $\sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$;
3. $\cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1$;
4. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$;
5. $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$;
6. $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$;
7. $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$;
8. $\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$;
9. $\tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$;
10. $\cos(t)^2 = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$;
11. $\sin(t)^2 = \frac{1 - \cos(2t)}{2}$;
12. $\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$;
13. $\cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$;
14. $\sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$;
15. $\sin(p) - \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$;
16. $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$;
17. $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$;
18. $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$.

5 Trigonométrie hyperbolique

Soit t réel.

$$\begin{array}{ll} 1. \operatorname{ch}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}; & 3. \operatorname{ch}(t)^2 - \operatorname{sh}(t)^2 = 1; \\ 2. \operatorname{sh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}; & 4. \text{etc.} \end{array}$$

6 Calcul de sommes

Soient n entier, q complexe, $(u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ des familles de complexes.

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

$$\text{Si } q \neq 1, \quad \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \quad \sum_{k=p}^n q^k = q^p \times \sum_{k=0}^{n-p} q^k = \frac{q^p - q^{n+1}}{1-q}$$

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} u_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j u_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n u_{i,j} \quad \sum_{1 \leq i < j \leq n} u_{i,j} = \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} u_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n u_{i,j}$$

$$\text{Si } u_{i,j} = u_{j,i} \quad 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} u_{i,j} = \sum_{1 \leq i,j \leq n} u_{i,j} - \sum_{i=1}^n u_{i,i}$$

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j \right) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i x_j = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$$

7 Formule du binôme

$$\forall (a, b, n) \in \mathbb{K}^2 \times \mathbb{N} \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

8 Identité de Bernoulli

$$\forall (x, y, n) \in \mathbb{K}^2 \times \mathbb{N}^* \quad x^n - y^n = (x-y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k$$

9 Suites arithmético-géométriques

Soit $(u_n)_n$ suite vérifiant $u_{n+1} = au_n + b$ pour n entier avec $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et $a \neq 1$. On pose α point fixe de l'équation de récurrence, i.e. $\alpha = a\alpha + b$. On a

$$\begin{cases} u_{n+1} &= au_n + b \\ \alpha &= a\alpha + b \end{cases} \implies u_{n+1} - \alpha = a(u_n - \alpha)$$

Le suite $(u_n - \alpha)_n$ est donc géométrique de raison a .

10 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Théorème 2. Soit $(u_n)_n$ une suite récurrente linéaire d'ordre deux vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \quad (\text{H})$$

avec $(a, b) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^*$. L'équation caractéristique (R) est

$$r^2 - ar - b = 0$$

- Si (R) admet deux racines α, β distinctes, alors

$$(u_n)_n \in S_H \iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad | \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \lambda \alpha^n + \mu \beta^n$$

- Si (R) admet une racine double α , alors

$$(u_n)_n \in S_H \iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad | \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (\lambda + \mu n) \alpha^n$$

- Si $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et (R) admet deux racines complexes conjuguées $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$, alors

$$(u_n)_n \in S_H \iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \rho^n (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))$$

11 Théorème des accroissements finis

Théorème 3. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$ et f dérivable sur $]a; b[$. Alors

$$\exists c \in]a; b[\quad | \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Corollaire 1 (IAF). Soit $f \in \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$, f dérivable sur $]a; b[$ avec $\sup_{t \in]a; b[} |f'(t)| \leq M$.

Alors

$$|f(b) - f(a)| \leq M |b - a|$$

On propose une autre version de l'inégalité des accroissements finis, plus utilisée en pratique :

Corollaire 2 (IAF). Soit f dérivable sur I avec f' bornée sur I . Pour $(a, b) \in I^2$, on a

$$|f(b) - f(a)| \leq \|f'\|_\infty |b - a|$$

Application : Les fonctions sin et cos sont 1-lipschitziennes.

12 Théorème de Taylor-Young

Théorème 4. Soit $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ avec $a \in I$ intervalle de \mathbb{R} . On a

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + o((x - a)^n)$$

13 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 5. Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$. Pour $(a, b) \in I^2$, on a

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b - a)^k + \frac{1}{n!} \int_a^b (b - t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

14 Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème 6. Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ et $f^{(n+1)}$ bornée sur I . Pour $(a, b) \in I^2$, on a

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right| \leq \|f^{(n+1)}\|_{\infty} \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

15 Sommes de Riemann

Théorème 7. Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a; b], \mathbb{R})$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t) dt$$

16 Algèbre linéaire

On note $\mathbb{K}^{(I)}$ l'ensemble des familles presque nulles de scalaires de \mathbb{K} .

Soit $(x_i)_{i \in I}$ famille de vecteurs de E un \mathbb{K} -ev. On a

$$\text{Vect}(x_i)_{i \in I} = \left\{ \sum_{i \in I} \alpha_i x_i, (\alpha_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \right\}$$

En particulier, pour $x \in E$, on a

$$\text{Vect}(x) = \{\alpha x, \alpha \in \mathbb{K}\}$$

et pour $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, on a

$$\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, (\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n \right\}$$

Soit E un \mathbb{K} -ev. Une famille libre et génératrice est une *base* de E .

17 Projections, projecteurs

Soit E un \mathbb{K} -ev et F, G des sev supplémentaires de E . On appelle *projection* sur F parallèlement à G l'application notée $p_{F,G}$ définie par

$$p_{F,G} : E \rightarrow E, x = a + b \mapsto a \quad \text{avec} \quad (a, b) \in F \times G$$

Définition 1. Soit E un \mathbb{K} -ev et $p \in \mathcal{L}(E)$. On dit que p est un projecteur si $p^2 = p$.

Théorème 8. Soit E un \mathbb{K} -ev. Une projection de E est un projecteur. Réciproquement, un projecteur p est la projection sur $\text{Im } p$ parallèlement à $\text{Ker } p$.

18 Involutions linéaires, symétries

Soit F et G deux sev supplémentaires de E . On appelle *symétrie* par rapport à F parallèlement à G l'application notée $s_{F,G}$ définie par

$$s_{F,G} : E \rightarrow E, x = u + v \mapsto u - v \quad \text{avec} \quad (u, v) \in F \times G$$

Définition 2. Soit E un \mathbb{K} -ev et $s \in \mathcal{L}(E)$. On dit que s est une involution linéaire si $s^2 = \text{id}$.

Théorème 9. Soit E un \mathbb{K} -ev. Une symétrie de E est une involution linéaire. Réciproquement, une involution linéaire est la symétrie par rapport à $\text{Ker}(s - \text{id})$ parallèlement à $\text{Ker}(s + \text{id})$.

19 Forme linéaire, hyperplan

Soit E un \mathbb{K} -ev. Un élément de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est une *forme linéaire*.

Définition 3. Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Théorème 10. Soit H sev de E un \mathbb{K} -ev. On a

$$H \text{ hyperplan de } E \iff \exists x \in E \setminus H \mid E = \text{Vect}(x) \oplus H$$

20 Algèbre linéaire en dimension finie

Théorème 11. Soit E un \mathbb{K} -ev avec $\dim E = n$. Une famille de vecteurs de E est une base si et seulement si elle est libre et constituée de n vecteurs ou si et seulement si elle est génératrice et constituée de n vecteurs.

Théorème 12 (Formule de Grassmann). Soient F, G sev de dimensions finies de E un \mathbb{K} -ev. On a

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$$

Proposition 1. Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie, F et G deux sev de E . On a l'équivalence

$$\begin{cases} F \subset G \\ \dim F = \dim G \end{cases} \iff F = G$$

Théorème 13. Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie et F, G des sev de E . On a

$$\begin{aligned} E = F \oplus G &\iff \begin{cases} \dim F + \dim G = \dim E \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases} \iff \begin{cases} \dim F + \dim G = \dim E \\ F + G = E \end{cases} \\ &\iff \exists \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G \text{ bases respectives de } F, G \mid \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G \text{ base de } E \end{aligned}$$

Théorème 14 (Théorème du rang). Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E un \mathbb{K} -ev de dimension finie et F un \mathbb{K} -ev.

On a
$$\dim E = \dim \text{Ker } f + \text{rg}(f)$$

Théorème 15. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E et F des \mathbb{K} -ev de même dimension finie. On a

$$f \text{ bijective} \iff f \text{ injective} \iff f \text{ surjective}$$

En particulier, si $E = F$, on a

$$f \in \text{GL}(E) \iff \text{Ker } f = \{0_E\} \iff \text{rg}(f) = \dim E \iff \det(f) \neq 0$$

Théorème 16. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ avec E et F des \mathbb{K} -ev de dimensions finies. On a

$$\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg}(f), \text{rg}(g))$$

21 Produit matriciel

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit $AB \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ par $AB = (c_{i,j})$ où $c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}$ pour tout $(i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; q \rrbracket$.

Proposition 2. Soit $(E_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a la relation

$$\forall (i,j,k,\ell) \in \llbracket 1; n \rrbracket^4 \quad E_{i,j} \times E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,\ell}$$

Proposition 3. Pour tout $(A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on a $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

22 Trace

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La *trace* de la matrice A notée $\text{Tr}(A)$ est définie par

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$$

Théorème 17. Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On a $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

23 Déterminants

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$$

On appelle *comatrice* de A notée $\text{Com}(A)$ la matrice des *cofacteurs* de A , i.e.

$$\text{Com}(A) = ((-1)^{i+j} \det(A_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$$

avec $A_{i,j}$ la matrice extraite de A par suppression de sa i -ème ligne et j -ème colonne.

Proposition 4. Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

1. $\det(A^\top) = \det(A)$
2. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
3. $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det(A) \neq 0$
4. $\det(AB) = \det(A) \det(B)$
5. $A \text{Com}(A)^\top = \text{Com}(A)^\top A = \det(A) I_n$

Théorème 18. Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$ et $V = (x_i^{j-1})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le déterminant $\det(V)$ dit de Vandermonde vaut

$$\det(V) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

24 Matrices et rang

Théorème 19. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a $\text{rg}(A) \leq \min(n, p)$.

Théorème 20. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\text{rg}(A) = r$. Il existe P, Q dans $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PJ_rQ$ avec $J_r = \text{diag}(I_r, 0)$.

25 Équations différentielles linéaires

Théorème 21. Soit $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$. On a

$$x' = a(t)x \iff x \in \text{Vect}(\varphi) \quad \text{avec} \quad \varphi : t \mapsto e^{A(t)} \quad \text{et} \quad A(t) = \int_{t_0}^t a(s) \, ds$$

Théorème 22. Soient a, b dans $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$ et $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{K}$. Il existe une unique solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = a(t)x + b(t) & \text{(L)} \\ x(t_0) = x_0 & \text{(CI)} \end{cases}$$

et celle-ci est donnée par

$$\forall t \in I \quad x(t) = e^{A(t)} \left(x_0 + \int_{t_0}^t e^{-A(s)} b(s) \, ds \right) \quad \text{avec} \quad A(t) = \int_{t_0}^t a(s) \, ds$$

Théorème 23. Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2

$$x'' + ax' + bx = 0 \tag{H}$$

Soit $x \in S_H$, solution de l'équation homogène (H), on a :

1. Si l'équation (R) admet deux racines distinctes α et β ,

$$x \in S_H \iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad | \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad x(t) = \lambda e^{\alpha t} + \mu e^{\beta t}$$

2. Si l'équation (R) admet une racine double α ,

$$x \in S_H \iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad | \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad x(t) = (\lambda t + \mu) e^{\alpha t}$$

3. Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et l'équation (R) admet deux racines complexes conjuguées $r \pm is$ ($s \neq 0$)

$$x \in S_H \iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad x(t) = e^{rt} [\lambda \cos(st) + \mu \sin(st)]$$

Proposition 5. Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, $P \in \mathbb{K}[X]$ et $m \in \mathbb{K}$. L'équation

$$x'' + ax' + bx = P(t)e^{mt} \tag{L}$$

admet une solution particulière de la forme

1. $x_0(t) = Q(t)e^{mt}$ si m pas racine de (R)
2. $x_0(t) = tQ(t)e^{mt}$ si m racine simple de (R)
3. $x_0(t) = t^2Q(t)e^{mt}$ si m racine double de (R)

avec $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\deg Q = \deg P$.

26 Polynômes

Définition 4. Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit scindé s'il peut s'écrire $P = \lambda \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et les α_i des scalaires (non nécessairement distincts).

Théorème 24. Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$ avec $B \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$. On a :

$$\exists!(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2 \mid A = BQ + R \quad \text{et} \quad \deg R < \deg B$$

Le polynôme Q est appelé quotient et R le reste de la division euclidienne de A par B .

Proposition 6. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. On a

$$\begin{aligned} a \text{ racine de } P \text{ d'ordre } m &\iff \exists Q \in \mathbb{K}[X] \mid P = (X - a)^m Q \quad \text{et} \quad Q(a) \neq 0 \\ &\iff \begin{cases} P(a) = P'(a) = \dots = P^{(m-1)}(a) = 0 \\ P^{(m)}(a) \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Proposition 7. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. On a

$$\begin{aligned} a \text{ racine de } P \text{ d'ordre au moins } m &\iff \exists Q \in \mathbb{K}[X] \mid P = (X - a)^m Q \\ &\iff P(a) = P'(a) = \dots = P^{(m-1)}(a) = 0 \end{aligned}$$

Théorème 25 (Formules de Taylor). Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On a

$$\forall a \in \mathbb{K} \quad P = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k$$

Théorème 26 (Polynômes de Lagrange). Soient x_0, \dots, x_n réels distincts. Il existe une unique famille de polynômes (L_0, \dots, L_n) de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 0; n \rrbracket^2$ et on a

$$\forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad L_i = \prod_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket \setminus \{i\}} \left(\frac{X - x_k}{x_i - x_k} \right)$$

27 Probabilités

Le cadre considéré est celui vu en MPSI avec Ω un univers fini.

Théorème 27 (Formules des probabilités totales). Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé fini et $(A_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ un système complet d'événements tels que $\mathbb{P}(A_i) > 0$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. On a

$$\forall B \in \mathcal{P}(\Omega) \quad \mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B|A_i) \mathbb{P}(A_i)$$

Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire réelle.

- On dit que X suit une loi *uniforme* sur $\llbracket 1; p \rrbracket$ si $X(\Omega) = \llbracket 1; p \rrbracket$ et

$$\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{p}$$

- On dit que X suit une loi de *Bernoulli* de paramètre $p \in [0; 1]$ si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et

$$\mathbb{P}(X = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$$

• On dit que X suit une loi *binomiale* de paramètre (n, p) avec n entier et $p \in [0; 1]$ si $X(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$ et

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Proposition 8. Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé fini. Les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont indépendantes si et seulement si

$$\forall (A_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \in \prod_{i=1}^n \mathcal{P}(X_i(\Omega)) \quad \mathbb{P} \left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i \in A_i\} \right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in A_i)$$

autrement dit si et seulement si les événements $\{X_i \in A_i\}_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ sont indépendants.

Théorème 28. Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé fini. Si X_1, \dots, X_n sont des variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$ avec $p \in [0; 1]$, alors $\sum_{i=1}^n X_i$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire réelle. On définit l'espérance de X notée $\mathbb{E}(X)$ par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x)$$

On définit la *variance* de X notée $\mathbb{V}(X)$ par

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2]$$

Théorème 29 (Théorème de transfert). Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé fini, X une variable aléatoire réelle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ avec $X(\Omega) \subset I$. On a

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \mathbb{P}(X = x)$$

Proposition 9 (Relation de König-Huygens). Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire réelle. On a

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Proposition 10. Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé fini et $X \sim \mathcal{B}(p)$ avec $p \in [0; 1]$. On a

$$\mathbb{E}(X) = p \quad \mathbb{V}(X) = p(1 - p)$$

Proposition 11. Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé fini et $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ avec $(n, p) \in \mathbb{N} \times [0; 1]$.

On a $\mathbb{E}(X) = np \quad \mathbb{V}(X) = np(1 - p)$

Théorème 30 (Inégalité de Markov). Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire réelle positive. On a

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}(X \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\varepsilon}$$

Théorème 31 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev). Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire réelle. On a

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

Théorème 32 (Loi faible des grands nombres). Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé fini et X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes de même loi. Notant $m = \mathbb{E}(X_1)$ et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, on a

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P} \left(\left| \frac{S_n}{n} - m \right| \geq \varepsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$