Préparation à l'interrogation n°15

1 Étude asymptotique

1. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de $\ln(1+x)$;
2. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$;
3. $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \mathrm{e}^{n\left(-\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = \mathrm{e}^{-1+\mathrm{o}(1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-1}$.

2 Trigonométrie

1. $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$;
2. $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$;
3. $\cos(t)^2 = \dfrac{1+\cos(2t)}{2}$;
4. $\sin(t)^2 = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$.

3 Calcul intégral

1. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$
2. $\displaystyle\int^x (1-t)^n \,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}$

4 Algèbre linéaire

1. Soient $\mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{G}$ des $\mathbb{K}$-ev, $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $g \in \mathscr{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$. On a
$$g \circ f = 0 \iff \mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g$$
2. Formule de Grassmann : Soient F, G sev de dimensions finies de E un $\mathbb{K}$-ev. On a
$$\dim(\mathrm{F}+\mathrm{G}) = \dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G} - \dim \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$$
3. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et F, G des sev de E. On a
$$\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G} \iff \begin{cases} \dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G} = \dim \mathrm{E} \\ \mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0_{\mathrm{E}}\} \end{cases} \iff \begin{cases} \dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G} = \dim \mathrm{E} \\ \mathrm{F} + \mathrm{G} = \mathrm{E} \end{cases}$$
$$\iff \exists \mathscr{B}_{\mathrm{F}}, \mathscr{B}_{\mathrm{G}} \text{ bases respectives de } \mathrm{F}, \mathrm{G} \mid \mathscr{B}_{\mathrm{F}} \uplus \mathscr{B}_{\mathrm{G}} \text{ base de } \mathrm{E}$$
4. Théorème du rang : Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ avec E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et F un $\mathbb{K}$-ev. On a
$$\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{rg}\,(f)$$
5. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ avec E et F des $\mathbb{K}$-ev de <u>même</u> dimension finie. On a
$$f \text{ bijective} \iff f \text{ injective} \iff f \text{ surjective}$$

5 Équation différentielle linéaire

Soient a, b dans $\mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ et $(t_0, x_0) \in \mathrm{I} \times \mathbb{K}$. Il existe une unique solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = a(t)x + b(t) & \text{(L)} \\ x(t_0) = x_0 & \text{(CI)} \end{cases}$$

et celle-ci est donnée par

$$\forall t \in \mathrm{I} \qquad x(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{A}(t)} \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(s)} b(s)\,\mathrm{d}s \right) \quad \text{avec} \quad \mathrm{A}(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s$$

6 Exercices types

1. Fonction Γ : relation fonctionnelle, régularité $\mathscr{C}^\infty$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$;
2. Intégrales de Bertrand ;
3. Polynôme caractéristique d'une matrice compagne ;
4. Inégalité arithmético-géométrique ;
5. Compacité de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$;
6. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ ouvert dense de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$;
7. Fermeture de $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

7 Exercice type

Feuille 58, exercices 1 et 9.

8 Exercice type

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes. On note $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$. Pour $t > 0$ et m réel, montrer

$$\mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant m) \leqslant \mathrm{e}^{-tm} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}_i})$$

Corrigé : Par croissance stricte de $u \mapsto \mathrm{e}^{tu}$ sur $\mathbb{R}$, on a

$$\{\mathrm{S}_n \geqslant m\} = \left\{\mathrm{e}^{t\mathrm{S}_n} \geqslant \mathrm{e}^{tm}\right\} = \left\{\prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{t\mathrm{X}_i} \geqslant \mathrm{e}^{tm}\right\}$$

D'après l'inégalité de Markov avec $\prod\limits_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{t\mathrm{X}_i}$ positive et l'indépendance des $\mathrm{e}^{t\mathrm{X}_i}$, on obtient

$$\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant m) \leqslant \mathrm{e}^{-tm} \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{t\mathrm{X}_i}\right) = \mathrm{e}^{-tm} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}_i})}$$

9 Questions de cours

Probabilités, développements en série entière usuels, graphes usuels.