ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°63

Exercice 1 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé et $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ variables aléatoires indépendantes de loi $\mathscr{U}_{\{-1,1\}}$.

1. Montrer $\quad \forall (t, \varepsilon) \in \left]\, 0\,; +\infty\, \right[^2 \qquad \mathbb{P}\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \mathrm{e}^{-tn\varepsilon}\,\mathrm{ch}\,(t)^n$

2. Pour $t > 0$, comparer $\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}$ et $\mathrm{ch}\,(t)$.

3. En déduire $\qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \mathrm{e}^{-n\varepsilon^2/2}$

Corrigé : 1. Soit $t, \varepsilon > 0$. Par croissance stricte de $u \mapsto \mathrm{e}^{tu}$, on a

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i \geqslant \varepsilon\right\} = \left\{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i \geqslant n\varepsilon\right\} = \left\{\exp\left(t\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i\right) \geqslant \mathrm{e}^{tn\varepsilon}\right\}$$

D'après l'inégalité de Markov appliquée à la variable aléatoire finie positive $\exp\left(t\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i\right)$, il vient

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \mathrm{e}^{-tn\varepsilon}\mathbb{E}\left(\exp\left(t\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i\right)\right)$$

Or
$$\mathbb{E}\left(\exp\left(t\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i\right)\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{t\mathrm{X}_i}\right)$$

et par indépendance puis égalité en loi des X_i, il vient

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{t\mathrm{X}_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}_i}) = \big(\mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}_1})\big)^n$$

Par transfert
$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}_1}) = \mathrm{e}^{t}\mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = 1) + \mathrm{e}^{-t}\mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = -1) = \mathrm{ch}\ t$$

On conclut
$$\boxed{\forall (t, \varepsilon) \in \left]\, 0\,; +\infty\, \right[^2 \qquad \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \mathrm{e}^{-tn\varepsilon}\,\mathrm{ch}^{\,n}\, t}$$

2. D'après les développements en série entière usuels, on a

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{ch}\,(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!}$$

Une récurrence immédiate permet de prouver que $2^n n! \leqslant (2n)!$ pour tout n entier d'où

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{ch}\,(t) \leqslant \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}}$$

Variante : On peut éviter une récurrence avec

$$(2n)! = \prod_{k=1}^{2n} k = \prod_{k=1}^{n} (2k) \times \prod_{k=1}^{n} (2k-1) = 2^n n! \prod_{k=1}^{n} (2k-1)$$

3. Soient $t, \varepsilon > 0$. On obtient $\qquad \mathbb{P}\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \mathrm{e}^{-tn\varepsilon + n\frac{t^2}{2}}$

En choisissant $t = \varepsilon$, il vient

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \mathrm{e}^{-n\varepsilon^2/2}}$$

Remarque : Le choix $t = \varepsilon$ est optimal sur la dernière égalité puisqu'il s'agit de la valeur de t qui minimise le trinôme dans l'exponentielle.

Exercice 2 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathscr{B}(p)$ avec $p \in \,]\,0\,;1\,[$ et $\mathrm{Y}_n = \mathrm{X}_n + \mathrm{X}_{n+1} + \mathrm{X}_{n+2}$ pour tout $n \geqslant 1$. Montrer

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Y}_k - 3p\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Corrigé : Les Y_n ne sont pas indépendantes ! En effet, on a

$$\forall n \geqslant 1 \qquad \mathbb{P}(\mathrm{Y}_n = 3, \mathrm{Y}_{n+1} = 0) = 0 \neq \mathbb{P}(\mathrm{Y}_n = 3) \times \mathbb{P}(\mathrm{Y}_{n+1} = 0)$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $n \geqslant 1$. On a

$$\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Y}_k - 3p\right| \geqslant \varepsilon\right\} \subset \bigcup_{\ell=0}^{2} \left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_{k+\ell} - p\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{3}\right\}$$

D'où
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Y}_k - 3p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \sum_{\ell=0}^{2} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_{k+\ell} - p\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

Pour $\ell \in [\![\, 0\,;\,2\,]\!]$, les variables $(\mathrm{X}_{k+\ell})_k$ sont indépendantes, de même loi, avec des moments d'ordre deux. D'après la loi faible des grands nombres, il s'ensuit

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Y}_k - 3p\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

Exercice 3 (**)

Une urne contient n billes numérotées de 1 à n. On saisit une poignée de billes et on note X la somme des numéros des billes. En supposant que toutes les poignées sont équiprobables, que vaut $\mathbb{E}(\mathrm{X})$?

Corrigé : Soit $\mathrm{U} \sim \mathscr{U}_{\mathcal{P}([\![\,1\,;\,n\,]\!])}$ et $\mathrm{X} = \sum_{x\in \mathrm{U}} x$. On peut écrire

$$\mathrm{X} = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{1}_{k\in\mathrm{U}}$$

Par suite
$$\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(k \in \mathrm{U})$$

et
$$\forall k \in [\![\,1\,;\,n\,]\!] \qquad \mathbb{P}(k \in \mathrm{U}) = \frac{\mathrm{Card}\ \mathcal{P}([\![\,1\,;\,n\,]\!] \smallsetminus \{k\})}{\mathrm{Card}\ \mathcal{P}([\![\,1\,;\,n\,]\!])} = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}$$

On conclut
$$\boxed{\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2} = \frac{n(n+1)}{4}}$$

Variante : On peut aussi considérer $(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n)$ des variables i.i.d de loi $\mathscr{B}(1/2)$ avec le formalisme suivant : X_i vaut 1 si i pioché et 0 sinon. On a

$$\mathrm{U} = \{i \in [\![1\,;\, n]\!] \mid \mathrm{X}_i = 1\} \sim \mathscr{U}_{\mathcal{P}([\![1\,;\, n]\!])}$$

puisque $\qquad \forall \mathrm{A} \in \mathcal{P}([\![1\,;\, n]\!]) \qquad \mathbb{P}(\mathrm{U} = \mathrm{A}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in \mathrm{A}} \{\mathrm{X}_i = 1\} \cap \bigcap_{i \in \bar{\mathrm{A}}} \{\mathrm{X}_i = 0\}\right) = \dfrac{1}{2^n}$

Puis

$$\mathrm{X} = \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{X}_k$$

et on retrouve

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{E}(\mathrm{X}_k) = \frac{n(n+1)}{4}$$

Exercice 4 (***)

Soit $p \in \,]\,0\,;1\,[$ et $q = 1 - p$. Soit $(\mathrm{X}_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p. On pose

$$\forall n \geqslant 1 \qquad \mathrm{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i \qquad \mathrm{T}_n = \frac{\mathrm{S}_n - np}{\sqrt{npq}}$$

1. Donner la loi et la fonction génératrice de S_n.
2. Déterminer $\mathbb{E}(\mathrm{T}_n)$, $\mathbb{V}(\mathrm{T}_n)$.
3. Calculer $\mathbb{E}(x^{\mathrm{T}_n})$ pour $x > 0$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(x^{\mathrm{T}_n})$.

Corrigé : 1. Soit n entier non nul. La variable aléatoire S_n est somme de n variables indépendantes de loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$ d'où

$$\boxed{\mathrm{S}_n \sim \mathscr{B}(n, p) \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{G}_{\mathrm{S}_n}(t) = (pt + 1 - p)^n}$$

2. Soit n entier non nul. On a par linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}(\mathrm{T}_n) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\mathrm{X}_i - p) = 0$$

Puis, par indépendance des X_i, il vient

$$\mathbb{V}(\mathrm{T}_n) = \frac{1}{npq} \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i\right) = \frac{1}{nqp} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(\mathrm{X}_i) = \frac{npq}{npq}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathbb{E}(\mathrm{T}_n) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(\mathrm{T}_n) = 1}$$

Remarque : La variable aléatoire T_n est dite *centrée réduite.*

3. Soit $x > 0$. Par indépendance des X_i, on trouve

$$\mathbb{E}\left(x^{\mathrm{T}_n}\right) = \mathbb{E}\left(x^{\frac{1}{\sqrt{npq}} \sum\limits_{i=1}^{n} (\mathrm{X}_i - p)}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} x^{\frac{\mathrm{X}_i - p}{\sqrt{npq}}}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(x^{\frac{\mathrm{X}_i - p}{\sqrt{npq}}}\right)$$

Puis par transfert, on obtient

$$\mathbb{E}\left(x^{\mathrm{T}_n}\right) = \left(px^{\sqrt{\frac{q}{np}}} + qx^{-\sqrt{\frac{p}{nq}}}\right)^n = \left[p \exp\left(\sqrt{\frac{q}{np}} \ln(x)\right) + q \exp\left(-\sqrt{\frac{p}{nq}} \ln(x)\right)\right]^n$$

Avec un développement limité à l'ordre deux, il vient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(x^{\mathrm{T}_n}\right) &= \left[p\left(1+\sqrt{\frac{q}{np}}\ln(x)+\frac{q}{2np}\ln(x)^2\right)+q\left(1-\sqrt{\frac{p}{nq}}\ln(x)+\frac{p}{2nq}\ln(x)^2\right)+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n \\ &= \left[\frac{p+q}{2n}\ln(x)^2+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n = \exp\left[n\ln\left(1+\frac{\ln(x)^2}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] = \exp\left[\frac{\ln(x)^2}{2}+\mathrm{o}(1)\right]\end{aligned}$$

On conclut $$\boxed{\forall x>0 \qquad \mathbb{E}\left(x^{\mathrm{T}_n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{\frac{\ln(x)^2}{2}}}$$

Remarque : Ce résultat est une conséquence du *théorème de la limite centrée* ou de son corollaire qu'est le théorème de Moivre-Laplace.

Exercice 5 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathscr{B}(1/2)$. On note $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i$ pour n entier non nul.

1. Déterminer une expression sommatoire de $u_n = \mathbb{P}\left(\mathrm{S}_n < \dfrac{n}{2}\right)$.
2. Pour $n \geqslant 1$, on note $v_n = \mathbb{P}\left(\mathrm{S}_n \geqslant \dfrac{n}{2}\right)$. Établir l'égalité
$$\forall n \geqslant 1 \qquad v_n = u_n + \mathbb{P}\left(\mathrm{S}_n = \frac{n}{2}\right)$$
3. En déduire le comportement asymptotique de u_n pour $n \to +\infty$.

Corrigé : 1. On a $\mathbb{P}\left(\mathrm{S}_n < \dfrac{n}{2}\right) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup\limits_{0\leqslant k<\frac{n}{2}}\{\mathrm{S}_n = k\}\right) = \sum\limits_{0\leqslant k<\frac{n}{2}}\mathbb{P}(\mathrm{S}_n = k)$

D'où $$\boxed{\mathbb{P}\left(\mathrm{S}_n < \frac{n}{2}\right) = \frac{1}{2^n}\sum_{0\leqslant k\leqslant \frac{n}{2}}\binom{n}{k}}$$

2. On a $$v_n = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{\frac{n}{2}\leqslant k\leqslant n}\{\mathrm{S}_n = k\}\right) = \sum_{\frac{n}{2}\leqslant k\leqslant n}\mathbb{P}(\mathrm{S}_n = k) = \frac{1}{2^n}\sum_{\frac{n}{2}\leqslant k\leqslant n}\binom{n}{k}$$

Avec le changement d'indice $k \longleftrightarrow n-k$, on trouve
$$v_n = \frac{1}{2^n}\sum_{0\leqslant k\leqslant \frac{n}{2}}\binom{n}{n-k} = \sum_{0\leqslant k\leqslant \frac{n}{2}}\mathbb{P}(\mathrm{S}_n = k) = \mathbb{P}\left(\mathrm{S}_n < \frac{n}{2}\right) + \mathbb{P}\left(\mathrm{S}_n = \frac{n}{2}\right)$$

Autrement dit $$\boxed{v_n = u_n + \mathbb{P}\left(\mathrm{S}_n = \frac{n}{2}\right)}$$

3. Si n est impair, alors $\mathbb{P}\left(\mathrm{S}_n = \dfrac{n}{2}\right) = 0$.
Supposons $n = 2m$. On a
$$\mathbb{P}(\mathrm{S}_{2m} = m) = \frac{\binom{2m}{m}}{2^{2m}} = \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}$$

Avec l'équivalent de Stirling, on obtient
$$\mathbb{P}(\mathrm{S}_{2m} = m) \underset{m\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^{2m}}\left(\frac{\mathrm{e}}{m}\right)^{2m}\frac{1}{2\pi m}\left(\frac{2m}{\mathrm{e}}\right)^{2m} 2\sqrt{\pi m} \underset{m\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi m}}$$

Par conséquent, indépendemment de la parité de n, on a

$$u_n = v_n + \mathrm{o}(1)$$

Enfin, les événements $\left\{\mathrm{S}_n < \dfrac{n}{2}\right\}$ et $\left\{\mathrm{S}_n \geqslant \dfrac{n}{2}\right\}$ sont complémentaires donc u_n et v_n vérifient le système

$$\begin{cases} u_n + v_n = 1 \\ u_n - v_n = \mathrm{o}(1) \end{cases}$$

Ainsi $$\boxed{u_n = \frac{1}{2} + \mathrm{o}(1) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}}$$

Exercice 6 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire de loi $\mathscr{U}_{[\![0\,;\,n-1]\!]}$ avec n entier. On suppose n non premier avec $n = ab$ et a, b des entiers supérieurs ou égaux à 2.

1. Montrer qu'il existe un unique couple de variables aléatoires (Q, R) à valeurs dans $\mathbb{N}$ tel que $\mathrm{X} = a\mathrm{Q} + \mathrm{R}$ avec $\mathrm{R}(\Omega) \subset [\![0\,;\, a-1]\!]$.
2. Préciser la loi de (Q, R) puis de Q et de R.
3. En déduire qu'il existe Y et Z, variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont on précisera les lois telles que $\mathrm{X} \sim \mathrm{Y} + \mathrm{Z}$.

Corrigé : 1. Soit $\omega \in \Omega$. D'après le théorème de la division euclidienne il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{N} \times [\![0\,;\, a-1]\!]$ tel que $\mathrm{X}(\omega) = aq + r$. Ceci prouve l'unicité du couple de variables aléatoires solutions sous réserve d'existence. On définit l'application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times [\![0\,;\, a-1]\!], x \mapsto (q, r)$ qui à x associe son couple quotient-reste. Cette application est bien définie et bijective d'après le théorème de la division euclidienne et on pose $(\mathrm{Q}, \mathrm{R}) = \varphi(\mathrm{X})$. Il s'agit bien d'une variable aléatoire discrète en tant que fonction d'une variable aléatoire discrète et par construction, on a

$$\boxed{\mathrm{X} = a\mathrm{Q} + \mathrm{R} \text{ avec } \mathrm{R}(\Omega) \subset [\![0\,;\, a-1]\!]}$$

Remarque : On peut expliciter Q et R : on a $\mathrm{Q} = \left\lfloor \dfrac{\mathrm{X}}{a} \right\rfloor$ et $\mathrm{R} = \mathrm{X} - a\mathrm{Q}$.

2. Soit $(q, r) \in [\![0\,;\, b-1]\!] \times [\![0\,;\, a-1]\!]$. D'après le théorème de la division euclidienne, l'application φ précédemment définie est une bijection et par suite

$$\mathbb{P}((\mathrm{Q}, \mathrm{R}) = (q, r)) = \mathbb{P}(\varphi(\mathrm{X}) = \varphi(x)) = \mathbb{P}(\mathrm{X} = x) = \frac{1}{n}$$

On détermine les lois marginales avec

$$\mathbb{P}(\mathrm{Q} = q) = \sum_{r=0}^{a-1} \mathbb{P}((\mathrm{Q}, \mathrm{R}) = (q, r)) = \frac{a}{n} = \frac{1}{b} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\mathrm{R} = r) = \sum_{q=0}^{b-1} \mathbb{P}((\mathrm{Q}, \mathrm{R}) = (q, r)) = \frac{b}{n} = \frac{1}{a}$$

Ainsi $$\boxed{(\mathrm{Q}, \mathrm{R}) \sim \mathscr{U}_{[\![0\,;\, a-1]\!] \times [\![0\,;\, b-1]\!]} \qquad \mathrm{Q} \sim \mathscr{U}_{[\![0\,;\, b-1]\!]} \qquad \mathrm{R} \sim \mathscr{U}_{[\![0\,;\, a-1]\!]}}$$

3. Soit $(q, r) \in [\![0\,;\, b-1]\!] \times [\![0\,;\, a-1]\!]$. On a

$$\mathbb{P}(\mathrm{Q} = q, \mathrm{R} = r) = \frac{1}{n} = \frac{1}{b} \times \frac{1}{a} = \mathbb{P}(\mathrm{Q} = q)\mathbb{P}(\mathrm{R} = r)$$

ce qui prouve que les variables Q et R sont indépendantes et on conclut

$$\boxed{\mathrm{X} = a\mathrm{Q} + \mathrm{R} \text{ avec } a\mathrm{Q} \text{ et R indépendantes et } a\mathrm{Q} \sim \mathscr{U}_{a[\![0\,;\, b-1]\!]},\ \mathrm{R} \sim \mathscr{U}_{[\![0\,;\, a-1]\!]}.}$$

Exercice 7 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathscr{B}(x)$ avec $x \in [\,0\,;1\,]$. Soit $f : [\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Pour n entier non nul, on note $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ et on pose

$$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad \mathrm{B}_n(f)(x) = \mathbb{E}\left(f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)\right)$$

1. Préciser la loi de S_n puis déterminer une expression sommatoire de $\mathbb{E}\left[f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)\right]$.
2. Si x est un point de continuité de f, montrer

$$\mathrm{B}_n(f)(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$$

Corrigé : 1. D'après le cours et par transfert, on a

$$\boxed{\mathrm{S}_n \sim \mathscr{B}(n, x) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\left(f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\mathbb{P}(\mathrm{S}_n = k) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k(1-x)^{n-k}}$$

2. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad |x-t| \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(t)| \leqslant \varepsilon$$

On a
$$|\mathrm{B}_n(f)(x) - f(x)| = \left|\mathbb{E}\left(f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right) - f(x)\right)\right| \leqslant \mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right) - f(x)\right|\right)$$

Posons $\mathrm{A}_n = \left\{\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n} - x\right| > \eta\right\}$. Ainsi

$$\begin{aligned}|\mathrm{B}_n(f)(x) - f(x)| &\leqslant \mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right) - f(x)\right| \mathbb{1}_{\mathrm{A}_n}\right) + \mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right) - f(x)\right| \mathbb{1}_{\overline{\mathrm{A}_n}}\right)\\ &\leqslant 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(\mathrm{A}_n) + \varepsilon\end{aligned}$$

D'après la loi faible des grands nombres, on a $\mathbb{P}(\mathrm{A}_n) = \mathrm{o}(1)$ et par conséquent

$$\boxed{\mathrm{B}_n(f)(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)}$$