Feuille d'exercices n°61

Exercice 1 (*)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé et X variable aléatoire réelle discrète ayant un moment d'ordre 4 et vérifiant $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X^4) = 1$.

1. Montrer $$|\mathbb{E}(X)| \leqslant 1$$
2. Déterminer la loi de X.

Exercice 2 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X variable aléatoire réelle discrète telle que $X(\Omega) \subset [\, a\,; b\,]$.

1. Établir $$\mathbb{V}(X) \leqslant \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$
2. Cette inégalité est-elle optimale ?

Exercice 3 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X et Y des variables aléatoires réelles discrètes finies vérifiant

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{E}(X^k) = \mathbb{E}(Y^k)$$

Montrer que X et Y ont même loi.

Exercice 4 (**)

Soit E un ensemble de cardinal n entier non nul. On tire au hasard et avec remise A, B des parties de E. Déterminer $\mathbb{P}(\operatorname{Card}(A \cap B) = 1)$.

Exercice 5 (**)

Soit E préhilbertien réel et $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$. On suppose qu'il existe $C \geqslant 0$ tel que

$$\forall (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n \qquad \|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k u_k\| \leqslant C$$

Montrer $$\sum_{k=1}^{n} \|u_k\|^2 \leqslant C^2$$

Exercice 6 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $\sigma \sim \mathscr{U}_{S_n}$ et X_σ le nombre de points fixes de σ. Justifier que X_σ est une variable aléatoire puis déterminer $\mathbb{E}(X_\sigma)$.

Exercice 7 (*)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = \pm 1) = 1/2$. On note $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ pour n entier et $\mathrm{L}_n(t) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\frac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}}}\right)$ pour t réel. Montrer que pour tout t réel, la suite $(\mathrm{L}_n(t))_n$ converge.

Exercice 8 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathscr{B}(1/2)$. On note $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ pour n entier non nul. Montrer

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{S}_n \geqslant \frac{2n}{3}\right) \leqslant r^n \quad \text{avec} \quad r = \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\right)$$

Exercice 9 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathscr{B}(x)$ avec $x \in [\,0\,;1\,]$. On note $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ pour n entier non nul. On considère $f : [\,0\,;1\,] \to \mathbb{R},\ t \mapsto |t - 1/2|$ et on pose

$$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad \mathrm{B}_n(f)(x) = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)\right] \quad \text{et} \quad \Delta_n(f) = \|\mathrm{B}_n(f) - f\|_\infty$$

1. Pour $\mathrm{X} \in \mathrm{L}^2$, comparer $\mathbb{E}(\mathrm{X})^2$ et $\mathbb{E}(\mathrm{X}^2)$.
2. Vérifier que f est lipschitzienne.
3. Montrer $$\Delta_n(f) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Exercice 10 (**)

Soient $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathscr{B}(p)$ et N une variable aléatoire indépendante des X_i avec $\mathrm{N} \sim \mathscr{B}(n,p)$ où n est un entier non nul et $p \in \,]\,0\,;1\,[$. On note $\mathrm{Y} = \sum\limits_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}_i$.

1. Justifier que Y est une variable aléatoire réelle discrète.
2. Déterminer la loi de Y à l'aide de fonctions génératrices mais sans recours aux familles sommables. On pourra utiliser la variable aléatoire $\sum\limits_{j=0}^{n} \mathbb{1}_{\{\mathrm{N}=j\}}$.
3. Retrouver le résultat précédent sans utiliser les fonctions génératrices.

Exercice 11 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle positive finie. Soit $\varphi \in \mathscr{C}^1([\,0\,;+\infty\,[\,, [\,0\,;+\infty\,[)$ strictement croissante telle que $\varphi(0) = 0$. Montrer

$$\mathbb{E}(\varphi(\mathrm{X})) = \int_0^{+\infty} \varphi'(t)\mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant t)\,\mathrm{d}t$$