ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°62

Exercice 1 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(X_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ des variables aléatoires réelles discrètes indépendantes d'espérance finie égale à μ. On pose

$$\forall \omega \in \Omega \qquad M(\omega) = \big(X_{i,j}(\omega)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$$

Soit λ réel. Justifier que $\chi_M(\lambda)$ est une variable aléatoire réelle discrète d'espérance finie puis calculer $\mathbb{E}(\chi_M(\lambda))$.

Exercice 2 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_n$ une suite d'événements. On note

$$A = \text{« une infinité d'événements } A_n \text{ est réalisée »}$$

1. Montrer que A est un événement.
2. Si la série $\sum \mathbb{P}(A_k)$ converge, montrer que $\mathbb{P}(A) = 0$.

   On suppose désormais les événements $(A_n)_n$ indépendants.

3. Montrer $\qquad \forall (n, N) \in \mathbb{N}^2 \qquad \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{N} \overline{A_k}\right) \leqslant \exp\left(-\sum_{k=n}^{N} \mathbb{P}(A_k)\right)$
4. On suppose que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge. Montrer que $\mathbb{P}(A) = 1$.

Exercice 3 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Montrer

$$\forall (A, B) \in \mathscr{A}^2 \qquad |\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)| \leqslant \frac{1}{4}$$

puis préciser le cas d'égalité.

Exercice 4 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $\sigma_n \sim \mathscr{U}_{S_n}$. On note X_n le nombre de points fixes de σ_n.

Montrer $$\mathbb{P}(X_n = 0) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-1}$$

Exercice 5 (***)

Peut-on truquer deux dés à six faces de sorte que la somme des points soit équirépartie sur $[\![2\,;\,12]\!]$?

Exercice 6 (***)

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathscr{B}(p)$ avec $p \in \left]0\,;1\right[$.

On pose $$\forall n \geqslant 1 \qquad Y_n = X_n X_{n+1}$$

1. Déterminer la loi de Y_n pour $n \geqslant 1$.
2. Discuter de l'indépendance de Y_i et Y_j pour $(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
3. Montrer $$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i - p^2\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Exercice 7 (***)

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

1. Dénombrer le cardinal de l'ensemble des couples $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $X \subset Y$.
2. Une urne contient n boules. On tire une poignée aléatoirement, on remet les boules dans l'urne et on tire une deuxième poignée. Quelle est la probabilité pour qu'aucune boule n'ait été tirée deux fois ?

Exercice 8 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X, Y indépendantes de loi uniforme sur $\mathcal{P}([\![1\,;\, n]\!])$ avec n entier non nul. Calculer $\mathbb{E}(\mathrm{Card}\ X)$ puis $\mathbb{E}(\mathrm{Card}\ X \cap Y)$.

Exercice 9 (****)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé et $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables indépendantes de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ pour n entier. On appelle *marche aléatoire* la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$.

1. Pour $n \geqslant 1$, préciser $\prod_{i=1}^{n} X_i(\Omega)$ et la loi du n-uplet $(X_1, \ldots, X_n)$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $n \geqslant 1$. Déterminer une expression sous forme de somme pour $$T_n(f) = \mathbb{E}(f(S_n))$$
3. Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, en déduire la relation de récurrence $$\forall n \geqslant 2 \qquad T_n(f) = T_{n-1}(g) \quad \text{avec} \quad g : x \mapsto \frac{f(x+1) + f(x-1)}{2}$$
4. Établir la monotonie de la suite $(\mathbb{E}(|S_n|))_{n\geqslant 1}$.
5. Comparer les suites $(\mathbb{E}(|S_n|))_{n\geqslant 1}$ et $(\sqrt{n})_{n\geqslant 1}$.
6. Déterminer la loi de S_n pour n entier non nul.
7. Montrer que la marche aléatoire repasse une infinité de fois presque sûrement par zéro.

Exercice 10 (***)

Soit $\alpha \in \left[0\,;\frac{1}{2}\right[$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \sum_{k=\lfloor \alpha n \rfloor + 1}^{n} \binom{n}{k} \qquad v_n = \sum_{k=\lfloor \alpha n \rfloor + 1}^{n} \ln(k) \binom{n}{k}$$

Déterminer un équivalent simple de u_n et v_n pour $n \to +\infty$.