ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°63

Exercice 1 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé et $X_1, \ldots, X_n$ variables aléatoires indépendantes de loi $\mathscr{U}_{\{-1,1\}}$.

1. Montrer $\quad \forall (t, \varepsilon) \in \left]0\,;+\infty\right[^2 \qquad \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geqslant \varepsilon\right) \leqslant e^{-tn\varepsilon}\,\mathrm{ch}\,(t)^n$

2. Pour $t > 0$, comparer $e^{\frac{t^2}{2}}$ et $\mathrm{ch}\,(t)$.

3. En déduire $\qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geqslant \varepsilon\right) \leqslant e^{-n\varepsilon^2/2}$

Indications : 1. Utiliser la technique de Tchernoff à savoir réécrire l'événement $\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geqslant \varepsilon\right\}$ pour $\varepsilon > 0$ en utilisant la croissance stricte de $u \mapsto e^{tu}$ avec $t > 0$.
2. Déterminer les développements en série entière des fonctions concernées.

Exercice 2 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathscr{B}(p)$ avec $p \in \left]0\,;1\right[$ et $Y_n = X_n + X_{n+1} + X_{n+2}$ pour tout $n \geqslant 1$. Montrer

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k - 3p\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Indications : Comparer les événements $\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k - 3p\right| \geqslant \varepsilon\right\}$ et $\bigcup_{\ell=0}^{2}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_{k+\ell} - p\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{3}\right\}$.

Exercice 3 (**)

Une urne contient n billes numérotées de 1 à n. On saisit une poignée de billes et on note X la somme des numéros des billes. En supposant que toutes les poignées sont équiprobables, que vaut $\mathbb{E}(X)$?

Indications : Pour $U \sim \mathscr{U}_{\mathcal{P}([\![1\,;n]\!])}$, écrire X à l'aide de U et de fonctions indicatrices.

Exercice 4 (***)

Soit $p \in \left]0\,;1\right[$ et $q = 1 - p$. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p. On pose

$$\forall n \geqslant 1 \qquad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad T_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}$$

1. Donner la loi et la fonction génératrice de S_n.
2. Déterminer $\mathbb{E}(T_n)$, $\mathbb{V}(T_n)$.
3. Calculer $\mathbb{E}(x^{T_n})$ pour $x > 0$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(x^{T_n})$.

Indications : 3. Utiliser le théorème de transfert, l'indépendance et l'égalité en loi des X_i puis effectuer un développement limité à l'ordre deux.

Exercice 5 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathscr{B}(1/2)$. On note $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ pour n entier non nul.

1. Déterminer une expression sommatoire de $u_n = \mathbb{P}\left(S_n < \dfrac{n}{2}\right)$.
2. Pour $n \geqslant 1$, on note $v_n = \mathbb{P}\left(S_n \geqslant \dfrac{n}{2}\right)$. Établir l'égalité
$$\forall n \geqslant 1 \qquad v_n = u_n + \mathbb{P}\left(S_n = \frac{n}{2}\right)$$
3. En déduire le comportement asymptotique de u_n pour $n \to +\infty$.

Indications : 1. Écrire $u_n = \sum_{0\leqslant k<\frac{n}{2}} \ldots$.
2. Utiliser un changement d'indice.
3. Considérer un système complet d'événements puis utiliser l'équivalent de Stirling.

Exercice 6 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire de loi $\mathscr{U}_{[\![0\,;\,n-1]\!]}$ avec n entier. On suppose n non premier avec $n = ab$ et a, b des entiers supérieurs ou égaux à 2.

1. Montrer qu'il existe un unique couple de variables aléatoires (Q, R) à valeurs dans $\mathbb{N}$ tel que $X = aQ + R$ avec $R(\Omega) \subset [\![0\,;\,a-1]\!]$.
2. Préciser la loi de (Q, R) puis de Q et de R.
3. En déduire qu'il existe Y et Z, variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont on précisera les lois telles que $X \sim Y + Z$.

Indications : 1. Considérer l'application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times [\![0\,;\,a-1]\!], x \mapsto (q, r)$ où q et r désignent respectivement quotient et reste de la division euclidienne de x par a.
2. Utiliser le caractère bijectif de φ.
3. Utiliser la décomposition $X = aQ + R$.

Exercice 7 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathscr{B}(x)$ avec $x \in [0\,;1]$. Soit $f : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Pour n entier non nul, on note $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et on pose
$$\forall x \in [0\,;1] \qquad B_n(f)(x) = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]$$

1. Préciser la loi de S_n puis déterminer une expression sommatoire de $\mathbb{E}\left[f\left(\dfrac{S_n}{n}\right)\right]$.
2. Si x est un point de continuité de f, montrer
$$B_n(f)(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$$

Indications : 2. On pourra considérer $A_n = \left\{\left|\dfrac{S_n}{n} - x\right| > \eta\right\}$ avec $\eta > 0$ bien choisi.