

Concours Blanc du 5/01/26

Epreuve de Physique

4h

Calculatrices interdites

Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

On laissera une marge à gauche de chaque page pour la correction.

Les calculatrices étant interdites, les applications numériques ne seront faites qu'avec un seul chiffre significatif.

Problème 1 : Principe d'un cinémomètre radar

La plupart des dispositifs de mesure des vitesses v des véhicules sont basés sur l'effet DOPPLER : une onde électromagnétique est émise en direction du véhicule à contrôler. Le décalage de fréquence entre l'onde incidente et l'onde réfléchie est proportionnel à v/c (où c est la célérité de la lumière dans le vide) et, même si cet écart est faible, un dispositif électronique approprié permet de le mesurer.

Les données numériques et valeurs des constantes physiques nécessaires sont regroupées en fin d'énoncé. Outre $i^2 = -1$ on repère les scalaires complexes par une barre : $\bar{T} \epsilon \mathbb{C}$.

A Transmission et réflexion d'une onde

Dans l'air, qui sera assimilé au vide, un émetteur E fixe dans le référentiel lié au sol émet une onde électromagnétique qui se propage en direction du véhicule dont on souhaite mesurer la vitesse v (figure 4). À la surface S d'abscisse z_S du véhicule (on supposera une surface plane et un véhicule métallique) le phénomène de réflexion engendre une onde transmise dans le métal et une onde réfléchie, qui sera ultérieurement mesurée par le récepteur R .

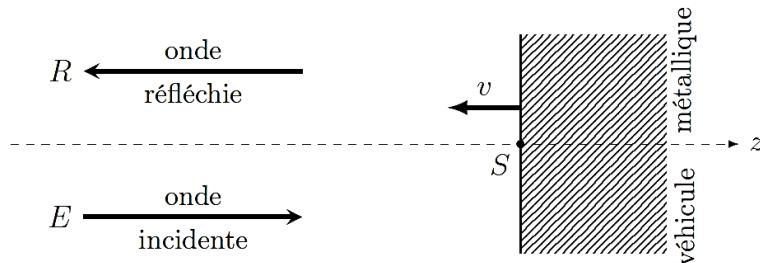


FIGURE 4 – Onde électromagnétique dirigée vers un véhicule en mouvement

Les représentations complexes de l'onde incidente (dans le vide $z < z_S$) et l'onde transmise (dans le métal $z > z_S$) seront respectivement cherchées sous les formes :

$$\vec{E}_{\text{inc}} = E_0 \exp [i(\omega t - kz)] \vec{e}_x \quad \vec{E}_{\text{tr}} = \bar{T} E_0 \exp [i(\omega t - \bar{k}z)] \vec{e}_x \quad (2)$$

où l'émetteur fixe les valeurs (supposées réelles positives) de E_0 et ω .

- – 17. Dans le vide, établir l'équation de propagation puis la relation de dispersion pour le champ \vec{E}_{inc} .

En déduire la relation liant la longueur d'onde dans le vide λ_0 et la fréquence f de l'onde.

Le métal étudié est de l'acier caractérisé par une densité volumique de charge nulle $\rho = 0$, le lien entre le champ électrique et la densité volumique de courant est donné par la relation $\gamma_0 \vec{E} = \vec{j} + \tau \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$ où $\gamma_0 \simeq 1,4 \cdot 10^7 \text{ SI}$ et $\tau = 1,0 \cdot 10^{-14} \text{ s}$.

- – 18. Préciser la dimension de la grandeur γ_0 (on utilisera les notations L, M, T et I pour les dimensions des longueur, masse, durée et intensité de courant) et la signification physique de τ .

Établir la relation de dispersion donnant \bar{k}^2 en fonction de ω , c , μ_0 , γ_0 , τ et ω .

- – 19. On s'intéresse à la seule solution \bar{k} de partie réelle positive ; elle s'écrit $\bar{k} = \frac{2\pi}{\lambda} - \frac{i}{\delta}$ où $\lambda > 0$ et $\delta > 0$. Quelles sont les interprétations de ces deux grandeurs ?

- – 20. A quelles conditions (que l'on traduira par des inégalités faisant intervenir ω , c , μ_0 , γ_0 , τ et ω) correspondent les 3 régimes de fréquences que l'on peut lire sur la figure 5 ?

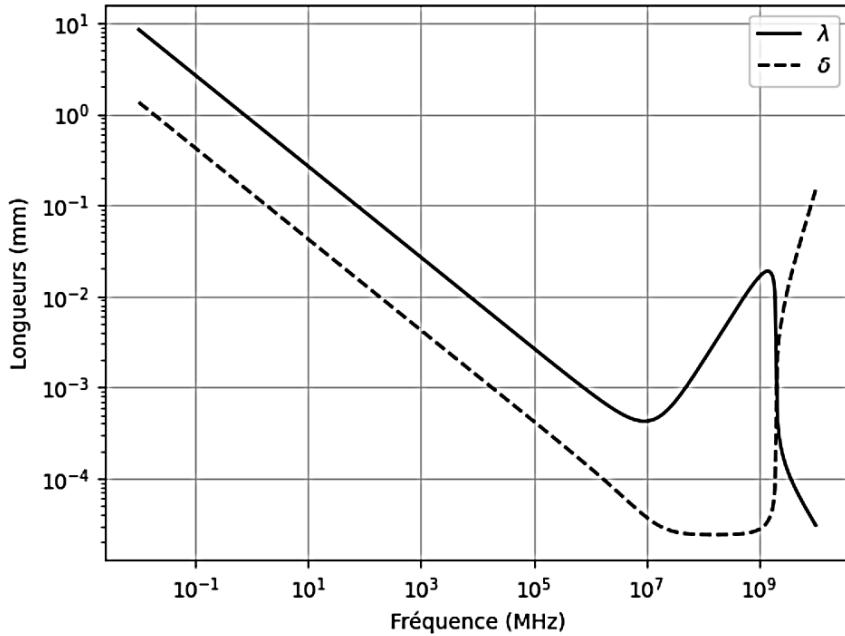


FIGURE 5 – Longueurs caractéristiques pour une onde dans un métal en échelle log-log

- – 21. Ici et dans toute la suite on se limitera au domaine radar ($f \sim 25$ GHz). Justifier par le calcul la forme limite des deux courbes ; préciser leur décalage. On notera ici $d = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}$. Peut-on dire que le matériau étudié est un métal parfait ? Est-il opaque ou transparent aux ondes radar ? Justifier, quantitativement, la réponse à ces deux questions.

B. Réflexion métallique

On adopte maintenant une description simplifiée de la réflexion des ondes électromagnétiques sur la surface du véhicule : on admet l'absence totale d'onde transmise (ce qui, dans l'équation (2), correspond à $\bar{\tau} = 0$). On rappelle que dans cette situation la surface $z = z_S$ du métal porte éventuellement des charges $\sigma(t)$ et des courants $\vec{i}_s(t)$ surfaciques, donnés par les relations de passage entre des milieux I et II :

$$\vec{E}_{\text{II}} - \vec{E}_{\text{I}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{\text{I} \rightarrow \text{II}} \quad \vec{B}_{\text{II}} - \vec{B}_{\text{I}} = \mu_0 \vec{i}_s \wedge \vec{n}_{\text{I} \rightarrow \text{II}} \quad (3)$$

On se place d'abord dans le cas où le véhicule est immobile en $z_S = 0$ m. En plus de l'onde incidente décrite par l'équation (2), une onde réfléchie de même polarisation et de même fréquence se propage dans le vide en sens inverse.

- – 22. Montrer l'absence de charge surfacique sur le métal et expliciter complètement le champ électrique de l'onde réfléchie.

On considère maintenant que le véhicule est en $z_S = 0$ m à $t = 0$ s et se dirige à vitesse v vers l'émetteur de l'onde étudiée. Le plan de réflexion est donc $z_S = -vt$ et on cherche une onde réfléchie de la forme $\vec{E}_{\text{ref}} = E'_0 \exp[i(\omega' t + k' z)] \vec{e}_x$.

- – 23. Quelles relations lient ω et k d'une part, ω' et k' d'autre part ?

Exprimer E'_0 en fonction de E_0 puis ω' en fonction de ω , v et c .

- – 24. Montrer l'existence de courants surfaciques sur la face $z_S = -vt$ du véhicule et préciser à quelle pulsation ω_i ils oscillent.

C. Effet Doppler et mesure de vitesse

Compte tenu de la condition évidente $|v| \ll c$ les pulsations ω de l'onde incidente et ω' de l'onde réfléchie sont assez proches ; toutefois leur écart relatif $\Delta = \frac{|\omega' - \omega|}{\omega}$ peut être mesuré par un dispositif électronique adapté, disposé au niveau de l'émetteur fixe en $z = -\ell$, qui permet finalement de mesurer la vitesse du véhicule.

Un dispositif possible de mesure de Δ est ainsi constitué : un circuit multiplicateur réalise en temps réel le produit d'un signal s proportionnel au champ électrique émis au point $z = -\ell$ et d'un signal s' proportionnel au champ électrique réfléchi reçu au même point. La sortie du multiplicateur est reliée à un filtre de fréquence de coupure f_c ; enfin, un analyseur de spectre mesure la fréquence fondamentale f_1 du signal ainsi filtré (figure 6).

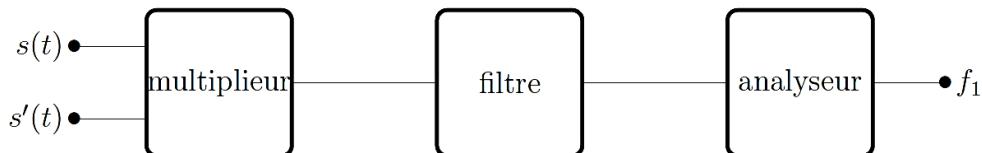


FIGURE 6 – Circuit de mesure de vitesse

□ – 25. Exprimer Δ au premier ordre en v/c et proposer une application numérique raisonnable ; commenter.

Montrer que la fréquence f_1 est pratiquement proportionnelle à la vitesse v à mesurer, sous réserve d'un choix pertinent de la nature du filtre et de f_c , que l'on proposera.

Données :

Formule d'analyse vectorielle $\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{V} = \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{V} - \Delta \vec{V}$.

Relation trigonométrique $\cos \theta \cos \theta' = \frac{1}{2} [\cos(\theta + \theta') + \cos(\theta - \theta')]$.

$10^{1/3} = 2,2$; $10^{2/3} = 4,6$; $9^{1/5} = 1,6$; $9^{2/5} = 2,4$; $\log_{10}(2\pi) = 0,80$.

Constantes physiques :

Charge élémentaire	$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Constante d'AVOGADRO	$\mathcal{N}_A = 6,0 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de FARADAY	$\mathcal{F} = e\mathcal{N}_A = 9,6 \cdot 10^4 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$
Constante molaire des gaz parfaits	$R = 8,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
Constante de NERNST à 25°C	$\frac{RT}{\mathcal{F}} \ln 10 = 0,059 \simeq 0,06 \text{ V}$
Permittivité électrique du vide	$\epsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$

Problème 2 : Les sondages ionosphériques

L'ionosphère est la couche supérieure de l'atmosphère terrestre ; elle s'étend au-dessus de 50 à 80 km d'altitude ; les électrons et ions libres y jouent un rôle important. À l'altitude où la densité électronique est la plus élevée, environ une particule d'air sur 1 000 est ionisée par les rayons UV, X et gamma solaires. Cette ionisation permet d'analyser les fluctuations des propriétés de la haute atmosphère par la méthode des sondages ionosphériques : une onde électromagnétique de haute fréquence, envoyée depuis le sol en direction de l'atmosphère, se réfléchit sur une zone ionisée à une altitude variable.

Dans toute la suite on pourra considérer que la densité volumique n_0 commune des ions et des électrons dans la haute atmosphère vérifie en tout point $n_0 \leq 10^{12} m^{-3}$.

Les vecteurs sont généralement surmontés d'une flèche (\vec{v}) sauf s'ils sont unitaires et sont alors affublés d'un chapeau ($\widehat{\vec{e}_x}$).

Formulaire d'analyse vectorielle

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}} f &= \Delta f \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}} \left(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{W} \right) = \overrightarrow{\operatorname{grad}} \operatorname{div} \vec{W} - \Delta \vec{W} \\ \operatorname{div} \left(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{W} \right) &= 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}} \left(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f \right) = \vec{0} \end{aligned}$$

A. Propagation d'ondes électromagnétiques dans l'atmosphère

Dans cette partie on étudie la propagation des ondes électromagnétiques dans l'atmosphère caractérisé, à la pulsation ω , par une densité volumique de charges nulle et la densité volumique de courants $\vec{j} = -n_0 e \vec{v}$ avec une vitesse \vec{v} des électrons donnée par l'équation (3) écrite en notation complexe :

$$im_e \omega \vec{v} = -e \vec{E} - m_e \frac{\omega_0^2}{i\omega} \vec{v} - \frac{m_e}{\tau} \vec{v} \quad (3)$$

où ω_0 et τ sont des constantes positives. Les champs électrique et magnétique de l'onde ont pour expression complexe $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp \left[i \left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} \right) \right]$ et $\vec{B} = \vec{B}_0 \exp \left[i \left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} \right) \right]$.

- – 33. Décrire en quelques mots l'origine de chacun des termes de l'équation (3). Pourquoi n'y a-t-il aucun terme lié au champ magnétique \vec{B} ? Quelle est la signification physique de la constante τ ? Quelle est la particularité du modèle si $\tau \rightarrow \infty$? *On se placera dans ce cas dans toute la suite.*
- – 34. Montrer que les ondes électromagnétiques dans un tel milieu sont transverses puis établir leur équation de dispersion exprimant \vec{k}^2 en fonction de la célérité c de la lumière dans le vide, ω , ω_0 et de la constante ω_p définie par $\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0}}$

Dans la *basse* atmosphère, on étudie la propagation d'ondes électromagnétiques dans le domaine lumineux. On définit dans ce cas l'indice optique N par l'expression $v_\phi = c/N$ de la vitesse de phase.

- – 35. Exprimer N en fonction de ω , ω_0 et ω_p

Dans la *haute* atmosphère (l'ionosphère), on admet que la propagation d'ondes électromagnétiques du domaine radio HF est caractérisée par $\omega_0 = 0$.

- – 36. Que devient ici l'équation de dispersion ? Dans quel domaine de fréquence le milieu est-il transparent ? La propagation est-elle dispersive ?

B. Écho ionosphérique

Le dispositif étudié ici est basé sur un émetteur au sol situé en $z < 0$. Cet émetteur envoie dans la basse atmosphère (assimilée au vide) une onde électromagnétique incidente de champ électrique $\vec{E}_i = E_0 \exp [i\omega(t - z/c)] \hat{e}_x$.

La réflexion sur la surface $z = 0$ séparant le vide de l'ionosphère crée une onde réfléchie de champ électrique $\vec{E}_r = \underline{\rho} E_0 \exp [i\omega(t + z/c)] \hat{e}_x$. La réflexion crée aussi une onde transmise dans l'ionosphère de champ électrique $\vec{E}_t = \underline{\beta} E_0 \exp [i(\omega t - kz)] \hat{e}_x$.

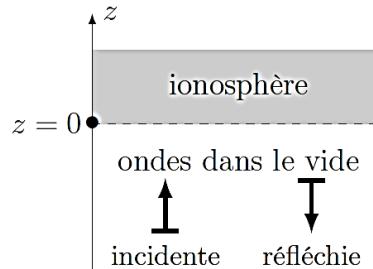


FIGURE 6 – Modèle pour l'étude des échos ionosphériques

L'ionosphère sera décrite comme un milieu équivalent au vide dans lequel la relation de dispersion est de la forme $k^2 c^2 = \omega^2 - \omega_p^2$ où $\omega_p > 0$ est la pulsation définie à la partie A

Enfin, on admet, en l'absence de toute discontinuité surfacique sur le plan $z = 0$, la continuité de toutes les composantes du champ électromagnétique de part et d'autre de ce plan.

- – 37. Exprimer les champs magnétiques \vec{B}_i , \vec{B}_r et \vec{B}_t associés respectivement à chacune des ondes incidente, réfléchie et transmise en fonction, suivant les cas, de E_0 , c , ω , t , z , k , $\underline{\rho}$ ou $\underline{\beta}$.

En déduire l'expression de $\underline{\rho}$ en fonction de ω , c et k puis en fonction de ω et ω_p .

On distinguera les cas $\omega < \omega_p$ et $\omega > \omega_p$.

- – 38. On définit le coefficient de réflexion R en puissance par : $R = \frac{\langle \vec{P}_r(0,t) \rangle \cdot (-\vec{u}_z)}{\langle \vec{P}_i(0,t) \rangle \cdot \vec{u}_z}$ où \vec{P}_i et \vec{P}_r

sont les vecteurs de Poynting des ondes incidentes et réfléchies et $\langle f(t) \rangle$ est la valeur moyenne sur le temps de $f(t)$

Exprimer R en fonction de $\underline{\rho}$.

- – 39.

Sans étudier la fonction, tracer l'allure qualitative de la courbe $\omega \mapsto R(\omega)$, en distinguant les deux cas $\omega < \omega_p$ et $\omega > \omega_p$.

Dans quel cas observe-t-on un écho ionosphérique ?

On rappelle ici que la grandeur ω_p dépend de la densité électronique n_0 de l'ionosphère ; cette densité électronique croît en général du sol (où on prendra $n_0 = 0$) vers les hautes altitudes. Le signal émis, de pulsation ω variable, est constitué d'impulsions brèves de durée Δt .

- – 40. Comment choisir Δt pour que la mesure de la durée séparant l'émission du signal et la réception de l'écho permette de mesurer l'altitude h de la surface de réflexion ?

Le décalage en fréquence (effet DOPPLER) de l'onde réfléchie renseigne sur les déplacements de l'air au sein de l'atmosphère. Avec trois récepteurs au minimum il est possible de mesurer par triangulation la direction et la vitesse des perturbations.

Problème 3 : Enregistrement et reproduction du son

A. Capter le son : microphone et oreille interne

Les grandeurs complexes seront soulignées sauf le nombre imaginaire pur j tel que $j^2 = -1$. Les grandeurs sinusoïdales comme $a(t) = a_0 \cos(\omega t + \varphi)$ pourront être représentées par la grandeur complexe $\underline{a}(t) = a_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{A}_0 e^{j\omega t}$, où l'amplitude complexe est $\underline{A}_0 = a_0 e^{j\varphi}$ de sorte que $a(t) = \operatorname{Re}(\underline{a})(t)$. La base cartésienne associée au repère $(Oxyz)$ sera notée $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$. Dans le plan (Oxy) , on pourra aussi utiliser les coordonnées polaires (r, θ) telles que $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$.

Une onde sonore se propageant dans l'air consiste essentiellement en une variation de la pression P autour de sa valeur moyenne P_0 , par exemple de la forme $P(x,t) = P_0 + P_1 \cos(\omega t - kx)$ pour une onde d'amplitude P_1 , harmonique de pulsation ω se propageant dans la direction de \vec{u}_x à la célérité $c_a = \omega/k$. Un gaz de pression P exerçant sur toute surface d'aire S une force normale d'intensité PS , les capteurs sonores sont de nature mécanique ; c'est à la fois le cas des microphones électrostatiques (partie I) mais aussi de l'oreille interne humaine (partie II). Ces deux parties sont indépendantes.

I – Microphones électrostatiques et directivité

I.1 – Le microphone électrostatique

Un microphone électrostatique est formé de deux électrodes planes, de même surface S , placées à courte distance d l'une de l'autre dans le vide, de même normale \vec{u}_x . L'électrode située en $x = d$ est fixe et maintenue au potentiel nul ; l'électrode placée en $x = 0$ (en l'absence d'onde sonore) est une membrane mobile sous l'action de l'onde sonore ; elle se déplace alors jusqu'en $x = X(t)$; elle est maintenue au potentiel constant V_0 (figure 1).

En l'absence d'onde sonore le courant électrique i dans le générateur est nul ; en revanche c'est la mesure de ce courant $i(t)$ qui permet la mise en évidence du déplacement $X(t)$ de la membrane mobile. On admet que le champ électrique qui règne entre les deux armatures de ce condensateur peut être relié aux charges $\pm Q(t)$ des deux armatures par les lois de l'électrostatique. On note ϵ_0 la permittivité diélectrique du vide et on suppose que les charges $\pm Q(t)$ sont réparties uniformément sur les surfaces des deux armatures en regard, ce qui revient à négliger tout effet de bord.

Q1. Déterminer le champ électrique \vec{E}_1 créé par la seule armature mobile de charge $+Q$ de part et d'autre de celle-ci.
On pourra exprimer le résultat de façon distincte selon le domaine d'espace.

(*On demande donc de calculer le champ électrique créé de chaque côté par un plan uniformément chargé en fonction de sa charge Q , de la surface S de l'électrode et de ϵ_0*)

Q2. Calculer de même le champ \vec{E}_2 créé par l'armature fixe. En déduire le potentiel électrostatique créé en tout point de l'espace situé entre les deux armatures, puis exprimer la capacité $C(t)$ du condensateur ainsi formé en fonction de ϵ_0 , S , d et $X(t)$.

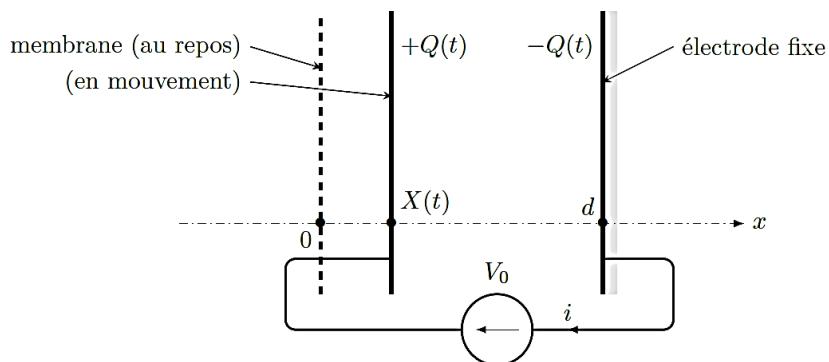


Figure 1 – Principe d'un microphone électrostatique.

Q3. Montrer que, lorsque la membrane est en mouvement à la vitesse $\vec{v} = \frac{dX}{dt} \vec{u}_x$, le courant qui parcourt le circuit s'écrit $i(t) = K(X) \frac{dX}{dt}$ et exprimer $K(X)$.

La détermination de ce courant permet donc un mesure non linéaire du déplacement de la membrane, sous l'action des forces de pression, des liaisons élastiques de la membrane et des forces électrostatiques exercées sur celle-ci par l'autre électrode du condensateur.

On note $\vec{F}_e = F_e(X) \vec{u}_x$ la résultante des forces électriques exercées sur la membrane mobile.

Q4. Exprimer $F_e(X)$ en fonction de ϵ_0 , S , V_0 , X et d . Montrer que cette force est conservative et relier l'énergie potentielle associée $E_p(X)$ à l'énergie électrostatique $W_e(X)$ du condensateur.

I.2 – Directivité d'un microphone « canon »

Un microphone électrostatique ordinaire enregistre le son associé à la résultante de toutes les ondes sonores qui parviennent à sa membrane. Pour enregistrer le son provenant d'une direction unique à grande distance, on peut utiliser un microphone à tube à interférences, aussi désigné microphone « canon » à cause de sa forme (cf. photographie de la figure 2).

Devant la membrane sensible M , on dispose un tube percé régulièrement d'orifices distants de d , de sorte que le signal enregistré en provenance d'une direction θ résulte des interférences entre N ondes acoustiques (sur la figure 3, $N = 4$). On considère dans la suite que ces ondes sont harmoniques de fréquence f comprise dans l'intervalle $[100 \text{ Hz}, 5 \text{ kHz}]$; elles se propagent à la célérité c_a .



Figure 2 – Microphone canon.
Source : DPA microphones.

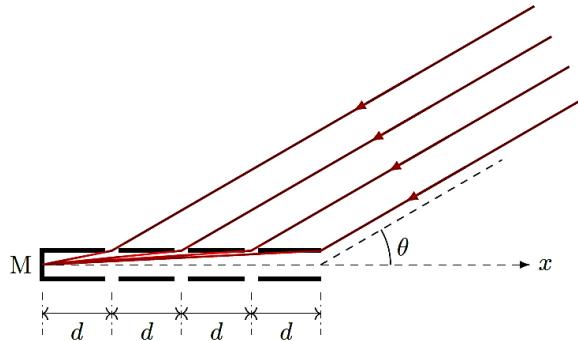


Figure 3 – Microphone à tube à interférences.

Après diffraction par leur orifice d'entrée dans le tube, chacune de ces N ondes se propage en direction de la membrane de détection selon une direction que l'on assimile dans la suite exactement à l'axe (Ox) du tube (ce qui revient à négliger la largeur du tube sur la figure 3).

Le signal reçu au niveau de la membrane est la somme des amplitudes complexes des N ondes, $\underline{p}_{\text{tot}} = \sum_{k=1}^N \underline{p}_k$ et l'intensité acoustique est la moyenne temporelle $I_{\text{tot}} = |\underline{p}_{\text{tot}}|^2$. On admet que ces N ondes parviennent en M avec la même amplitude p_0 et on pose $I_0 = p_0^2$.

Toutes les propriétés liées à la diffraction et aux interférences des ondes acoustiques sont considérées comme identiques aux mêmes propriétés pour les ondes lumineuses, et bien sûr en particulier le théorème de Malus.

On s'intéresse d'abord au cas où $N = 2$.

Q5. Montrer que, lors de la réception en M , $\underline{p}_2 = \underline{p}_1 e^{-j\varphi}$ et exprimer φ en fonction de c_a , f , d et θ .

Q6. Établir l'expression de l'intensité du signal acoustique reçu en M sous la forme $I_{\text{tot}} = I_0 f_2(\varphi)$. Expliciter et commenter l'expression de la fonction f_2 .

On se place désormais dans le cas où $N = 4$.

Q7. Montrer que l'intensité totale se met sous la forme $I_{\text{tot}} = I_0 f_2(\varphi) f_2(2\varphi)$. Déterminer la période ψ de cette fonction de φ , ainsi que sa valeur maximale I_{max} ; commenter physiquement les valeurs de ψ et I_{max} .

Le tracé de la fonction $I_{\text{tot}}(\varphi)$ est proposé figure 4. On considère qu'un signal acoustique n'est significatif que si son intensité représente au moins 20 % de la valeur maximale I_{max} .

Q8. Montrer qu'un microphone à tube à interférences construit selon le principe ci-dessus sélectionne les ondes acoustiques provenant d'un cône étroit d'axe (Ox) de demi-angle au sommet θ_{max} , à exprimer en fonction notamment de c_a , f et d . Préciser comment il convient de choisir d pour assurer la condition $\theta_{\text{max}} < 5^\circ$. Commenter.

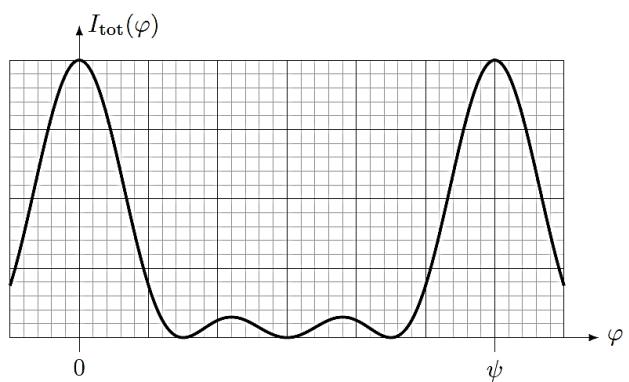


Figure 4 – Tracé de $I_4(\varphi)$.

Faire l'application numérique de la valeur limite de d avec $c_a = 350 \text{ m.s}^{-1}$; $100 \text{ Hz} < f < 5 \text{ kHz}$ et $\theta_0 = 5^\circ \approx 0,1 \text{ rad}$.

II – L'oreille interne

Au sein de l'oreille interne, la cochlée est un tube assez long, modélisé comme un tube d'axe (Ox), de diamètre variable, qui contient les terminaisons du nerf auditif. En fonction de leur position x dans le tube, ces terminaisons sont sensibles à différentes fréquences. Dans ce tube se propage le long de (Ox) une onde acoustique caractérisée par l'équation de dispersion :

$$\underline{k}^2(x) = \frac{k_0^2 \omega^2}{\omega_r^2(x) - \omega^2}$$

où $k_0 > 0$ est une constante et $\omega_r(x) > 0$ est une fonction monotone.

Une onde de pulsation ω entre dans la cochlée en $x = 0$, puis se propage le long de l'axe (Ox) jusqu'au lieu d'absorption, en $x = x_r$, où l'onde est absorbée et détectée par le nerf auditif.

Q9. Exprimer la condition de propagation de l'onde pour une position x quelconque comprise entre 0 et x_r . En déduire que $\omega_r(x)$ est nécessairement monotone décroissante. Relier la pulsation ω de l'onde et la valeur de $\omega_r(x_r)$ au point d'absorption.

On s'intéresse à l'onde acoustique qui se propage dans la cochlée en amont du lieu de détection, donc pour $x < x_r$; cette onde est recherchée sous la forme $\underline{p}(x,t) = A(x) e^{j(\omega t - \varphi(x))}$ où $A(x) > 0$ et $\varphi(x)$ sont des fonctions réelles ; cette onde $\underline{p}(x,t)$ vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 \underline{p}}{\partial x^2}(x,t) = -\underline{k}^2(x) \underline{p}(x,t).$$

Q10. Établir deux équations différentielles vérifiées par $\varphi(x)$ et $A(x)$. En déduire la relation $A(x) = \frac{H}{\sqrt{\varphi'(x)}}$ où $\varphi' = \frac{d\varphi}{dx}$ et H est une constante d'intégration (à ne pas chercher à déterminer). Justifier le signe de φ' dans le raisonnement suivi.

Q11. Préciser les sens de variation de $A(x)$ et $k(x)$, puis proposer un tracé de l'allure de l'onde (réelle) de pression qui se propage dans la cochlée le long de (Ox).

B – Produire le son : haut-parleurs électrodynamiques

Inventé en 1925, le haut-parleur électrodynamique comporte un aimant permanent dont les pièces polaires sont formées de deux cylindres coaxiaux. Le cylindre central en forme le pôle nord magnétique et le cylindre externe le pôle sud magnétique, de sorte que le champ magnétique \vec{B}_0 y est radial, dirigé du centre vers l'extérieur. Un circuit formé de N spires quasiment circulaires, de même rayon r , entoure le cylindre central (le schéma de la figure 5 montre une seule de ces spires). On note i le courant électrique qui parcourt ces spires. Un point de l'espace situé entre les deux pièces polaires sera repéré en coordonnées polaires avec la base locale $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, l'axe commun des cylindres et des spires étant noté (Oz).

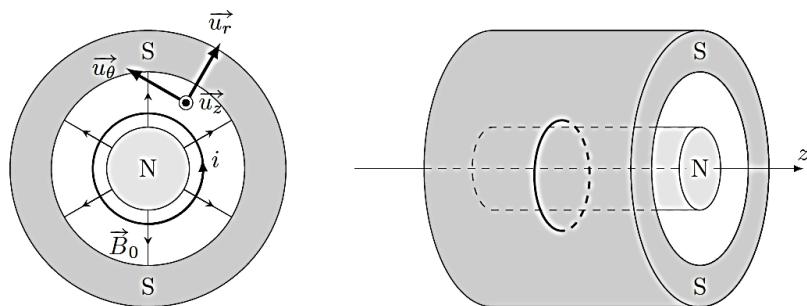


Figure 5 – Une spire du haut-parleur électrodynamique.

On note R_1 la résistance d'une seule des spires et L_1 son inductance propre. Ces N spires sont parcourues par le même courant et pratiquement jointives.

Q12. Exprimer la résistance totale R_b et l'inductance totale L_b de la bobine formée des N spires en fonction de R_1 , L_1 et N .

L'ensemble des spires est mis en mouvement le long de l'axe (Oz) avec la vitesse $\vec{v} = \frac{dz}{dt} \vec{u}_z$. Elles restent dans le domaine de champ magnétique $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_r$ où B_0 est une constante.

Q13. Montrer que la force électromotrice e induite par ce mouvement dans l'ensemble des spires s'écrit $e = 2\pi r N B_0 \frac{dz}{dt}$. On pourra s'intéresser au flux Φ du champ magnétique à travers un cylindre (\mathcal{C}), appuyé sur le contour fermé d'une spire d'une part et refermé en dehors de l'aimant, dans une zone où le champ magnétique est nul ou négligeable (voir figure 6).

Q14. Déterminer l'expression de la résultante \vec{F} des forces électromagnétiques qui s'exercent sur les N spires. Exprimer $\vec{F} \cdot \vec{v}$ en fonction de e notamment et proposer une interprétation de cette relation.

La figure 7 présente un modèle électromécanique du haut-parleur. Les N spires de la bobine sont rigidement liées à une membrane mobile retenue à sa position d'équilibre $z = 0$ (en l'absence de signal électrique) par un ensemble de ressorts disposés sur la périphérie de la membrane, équivalents à un ressort unique de raideur K . L'alimentation de la bobine par l'étage de sortie de l'amplificateur est modélisée par un générateur de tension $E(t)$. On note M la masse de l'ensemble mobile formé de la membrane et de la bobine et on néglige l'influence du poids. On tient cependant compte des forces dissipatives exercées par l'air sur la membrane du fait de la création de l'onde acoustique lors des mouvements de la membrane : elles sont modélisées par la résultante $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$ (modèle de type fluide).

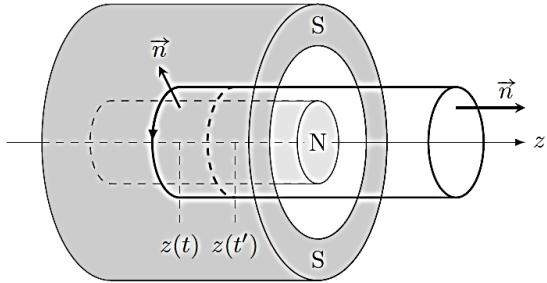


Figure 6 – Une surface appuyée sur l'une des spires mobiles.

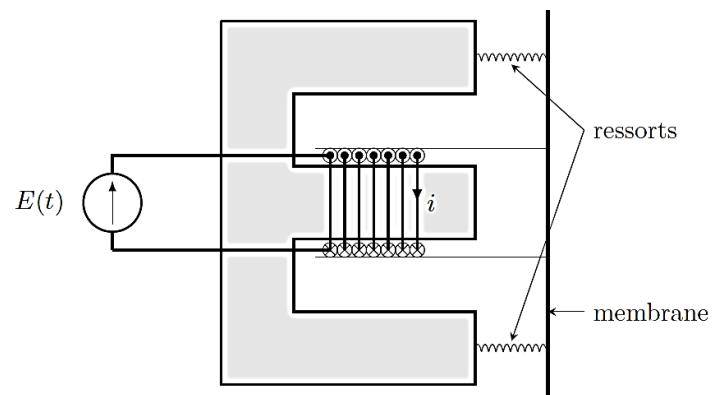


Figure 7 – Un modèle de haut-parleur électrodynamique.

Q15. Montrer que les grandeurs $i(t)$ et $z(t)$ vérifient l'équation différentielle :

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q_m} \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z(t) = -\beta i(t)$$

où ω_0 , Q_m et β sont à exprimer en fonction de K , M , λ , r , N et B_0 .

Q16. Représenter le circuit électrique équivalent et en déduire la seconde équation différentielle couplant $i(t)$ et $z(t)$:

$$E(t) = R_b i(t) + L_b \frac{di}{dt} - \gamma \frac{dz}{dt}$$

où γ est à exprimer en fonction de r , N et B_0 .

On note $\mathcal{P}_G = E(t) i(t)$, $E_c = \frac{1}{2} M \left(\frac{dz}{dt} \right)^2$, $E_e = \frac{1}{2} K z^2$ et $E_m = \frac{1}{2} L_b i^2$.

Q17. Établir un bilan énergétique du fonctionnement du haut-parleur ; exprimer notamment la puissance \mathcal{P}_a transmise par la membrane à l'air environnant (et en particulier à l'onde acoustique créée par le haut-parleur).