

## DD-DM 11 de Physique 17/01/25

**Pb 1 : L'équation de Klein–Gordon**

Dans le langage général, le sens usuel du mot *impulsion* désigne l'élan initial qu'on peut donner à une particule élémentaire ou à un projectile macroscopique qui poursuit ensuite son mouvement. Le même mot a un sens plus spécifique en physique ; l'impulsion, d'abord définie en mécanique *classique* comme la quantité de mouvement dans de très nombreux cas, se retrouve en mécanique *quantique* comme en mécanique *relativiste* avec un sens étendu.

Nous *admettrons* dans tout ce qui suit que l'impulsion  $\vec{p}$  d'une particule ponctuelle *libre* (non engagée dans une liaison), de masse  $m$  et d'énergie  $E$  est, dans le cadre général de la théorie d'EINSTEIN (1905), donnée par la relation dite du *triangle relativiste* :

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (1)$$

où  $p = \|\vec{p}\|$  et  $c = 3,0 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  est la célérité de la lumière dans le vide ; par ailleurs, cette même impulsion  $\vec{p}$  est, dans la description *ondulatoire* des particules, associée à la longueur d'onde  $\lambda$  de l'onde associée à la particule par la relation de DE BROGLIE (1924) :

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (2)$$

où  $h = 6,6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{Hz}^{-1}$  est la constante de PLANCK (1900).

**I. Impulsion de particules élémentaires**

- – 1. Quel est, à votre avis, la nature du « triangle relativiste » évoqué par la relation (1) ? Représenter celui-ci.

Quelle est l'unité usuelle, dans le système international, de l'impulsion  $p$  ? du produit  $pc$  ?

L'énergie des systèmes *macroscopiques* s'exprime usuellement en joule (J) ou en kilowatt-heure ( $1 \text{ kW} \cdot \text{h} = 3,6 \text{ MJ}$ ). Dans toute la suite de la partie I, l'énergie des particules *élémentaires* sera donnée en MeV (méga-électron volt) où  $1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$  et  $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$ . Les masses des particules seront données en  $\text{MeV}/c^2$  et leurs impulsions en  $\text{MeV}/c$ . Par exemple la masse de l'électron vaut  $m_e = 0,51 \text{ MeV}/c^2$  et celle du proton vaut  $m_p = 940 \text{ MeV}/c^2$  (ou, si on préfère,  $m_e c^2 = 0,51 \text{ MeV}$  et  $m_p c^2 = 940 \text{ MeV}$ ).

- – 2. On appelle *énergie de repos* d'une particule la valeur  $E_0$  de l'énergie de celle-ci lorsque son impulsion est nulle. Exprimer  $E_0$  pour un proton et calculer sa valeur numérique.

Pour une particule *en mouvement*, le supplément d'énergie  $E_c = E - E_0$  porte le nom d'*énergie cinétique*.

- – 3. On s'intéresse d'abord aux particules vérifiant la relation (1) dans le cas de la *limite classique*, lorsque  $E_c \ll E_0$ . En vous limitant au premier ordre non nul, donner dans ce cas une expression de  $E_c$  en fonction de l'impulsion  $p$  et de la masse  $m$  de la particule. Quelle est alors la relation entre l'impulsion  $\vec{p}$  et la vitesse  $\vec{v}$  d'une particule ?

Quelle vitesse maximale peut-on donner à un proton pour rester dans la limite classique telle que  $E_c/E_0 < 1\%$  ? Même question pour un électron.

Si on ne se limite pas aux faibles vitesses, on peut montrer, et on l'admettra, la relation générale entre la masse  $m$ , la vitesse  $\vec{v}$  de norme  $v = \|\vec{v}\|$ , l'impulsion  $\vec{p}$  de la particule et la célérité  $c$  de la lumière :

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3)$$

- – 4. En déduire l'expression générale de l'énergie totale  $E = f(E_0, v, c)$  d'une particule de masse  $m$ .
- – 5. Un photon est une particule associée à une onde électromagnétique dans le vide et dont la vitesse est donc égale à  $c$ . Que peut-on en déduire, pour sa masse, de la relation  $E = f(E_0, v, c)$  établie à la question précédente ?  
 Déduire de (2) l'expression de l'énergie  $E$  d'un photon en fonction de la longueur d'onde  $\lambda$  puis de la fréquence  $\nu$  de l'onde. Faire l'application numérique dans les cas des ondes lumineuses des domaines bleu ( $\lambda \sim 400$  nm) puis rouge ( $\lambda \sim 600$  nm). On pourra exploiter le fait que  $hc \simeq 1,2 \text{ eV} \times \mu\text{m}$  et on exprimera  $E$  en eV.

## II. L'équation de Klein–Gordon

Lors du développement de la mécanique quantique (ou mécanique ondulatoire), l'onde de matière  $\underline{\Psi}(\vec{r}, t)$  a d'abord été considérée comme solution de l'équation de SCHRÖDINGER (4) :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\underline{\Psi} + V(\vec{r})\underline{\Psi}(\vec{r}, t) = i\hbar\frac{\partial\underline{\Psi}}{\partial t} \quad \text{où } \hbar = \frac{h}{2\pi} \text{ et } i^2 = -1 \quad (4)$$

pour une particule de masse  $m$  repérée par sa position  $\vec{r}$  et soumise à l'interaction décrite par la fonction potentiel scalaire  $V(\vec{r})$ . En 1926, KLEIN et GORDON en ont proposé une version modifiée qu'on écrira :

$$\hbar^2 c^2 \Delta\underline{\Psi} + \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - V(\vec{r}) \right)^2 \underline{\Psi}(\vec{r}, t) = m^2 c^4 \underline{\Psi}(\vec{r}, t) \quad (5)$$

Dans la suite on s'intéressera exclusivement aux solutions de l'une ou l'autre équation, de la forme :

$$\underline{\Psi}(\vec{r}, t) = \underline{\psi}_0 \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} (Et - p(E)x) \right]$$

où  $\underline{\psi}_0$  est une certaine constante complexe,  $x$  est l'une des coordonnées cartésiennes de  $\vec{r}$ ,  $E > 0$  est l'énergie de la particule et  $p(E) > 0$  son impulsion.

- – 20. L'état associé à cette fonction d'onde est-il stationnaire ?

Dans quel sens le mouvement de la particule décrite par cette onde a-t-il lieu ?

Exprimer les vitesses de phase  $v_\varphi$  et de groupe  $v_g$  en fonction de  $E$ , de  $p(E)$  et de sa dérivée.

- – 21. Exprimer  $p(E)$  et  $v_g(E)$  dans le cas d'une particule vérifiant l'équation de SCHRÖDINGER dans un domaine où  $V$  est constant. En déduire le caractère relativiste ou non du modèle associé à l'équation de SCHRÖDINGER.
- – 22. Répondre aux mêmes questions dans le cas d'une particule vérifiant l'équation de KLEIN–GORDON (5).

On s'intéresse enfin à la résolution du problème physique suivant : la particule étudiée est libre ( $V = 0$ ) pour  $x < 0$  et  $x > a$  et pourvue d'une énergie  $E$ , tandis que, dans l'intervalle  $x \in [0, a]$ , elle est soumise à une interaction caractérisée par  $V = V_0 > E$  (figure 5) et même  $V_0 - E > mc^2$ . Les solutions de l'équation (de SCHRÖDINGER ou de KLEIN-GORDON) seront donc écrites, pour  $x < 0$  et  $x > a$ , sous les formes respectives :

$$\underline{\Psi}(x < 0, t) = \underline{\psi}_0 \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} (Et - px) \right] + \underline{R} \underline{\psi}_0 \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} (Et + px) \right]$$

$$\underline{\Psi}(x > a, t) = \underline{T} \underline{\psi}_0 \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} (Et - px) \right]$$

où  $\underline{T}$  et  $\underline{R}$  sont deux constantes complexes.

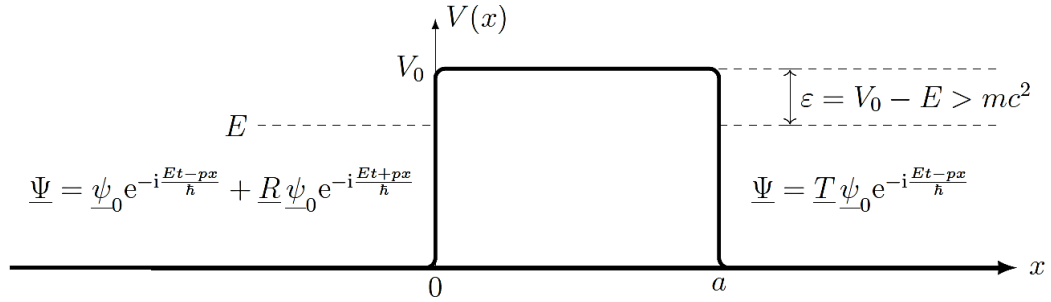


FIGURE 5 – Barrière de potentiel

On se place d'abord dans le cas de l'équation de SCHRÖDINGER.

- – 23. Quelle est la nature de l'onde dans le domaine  $x \in [0, a]$  ?

Quelles relations permettent de calculer  $\underline{R}$  et  $\underline{T}$  ? *On ne demande pas de les exprimer ici !*

Quel phénomène physique peut-on mettre ainsi en évidence ?

Quelle est l'interprétation physique de  $|\underline{T}|^2$  ?

On se place maintenant dans le cas de l'équation de KLEIN-GORDON.

- – 24. Quelle est la nature de l'onde dans le domaine  $x \in [0, a]$  ? On notera qu'en introduisant

$$\varepsilon = E - V_0, \text{ on a } q^2 = \frac{(\varepsilon - mc^2)(\varepsilon + mc^2)}{c^2} > 0.$$

Les mêmes relations que dans l'étude de la barrière de potentiel dans le cadre de l'équation de SCHRÖDINGER conduisent, pour l'onde de KLEIN-GORDON, à la relation (que l'on admettra) :

$$|\underline{T}|^2 = \frac{1}{|\cos \varphi - i\alpha \sin \varphi|^2} \text{ avec } \alpha = \frac{1}{2} \left( \frac{p}{q} + \frac{q}{p} \right) \text{ et } \varphi = \frac{qa}{\hbar}$$

- – 25. Déterminer la valeur maximale de  $|\underline{T}|^2$ . Commenter.

## **Pb 2 : Réflexion totale frustrée et effet tunnel**

Les deux parties I et II de ce sujet sont indépendantes.

Je vous conseille de commencer par la partie II.

Certaines valeurs numériques sont regroupées en fin d'énoncé.

Certaines questions peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Toute démarche engagée, même non aboutie, et toute prise d'initiative seront valorisées. Le barème prend en compte le temps nécessaire à la résolution de ces questions.

### **I Capture d'empreintes digitales par réflexion totale frustrée**

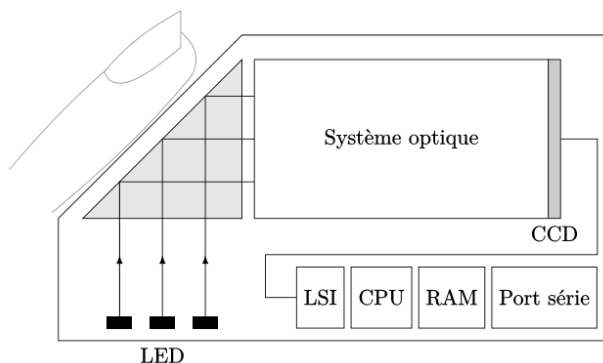
La sous-partie I.A. introduit le phénomène étudié. Les sous-parties I.B et I.C sont liées par une analogie qu'on souhaite établir entre deux situations, l'une se présentant en physique quantique et l'autre en optique ondulatoire. Néanmoins, en dehors des questions développant l'analogie, les sous-parties sont conçues de manière relativement autonomes.

Il existe différentes technologies de capteurs d'empreinte digitale, c'est-à-dire de dispositifs permettant d'obtenir une image numérisée d'une empreinte digitale, le plus souvent à des fins d'identification. Certaines de ces technologies sont embarquées dans des smartphones. La technologie dite « capteur optique d'empreinte digitale » est très employée, elle repose sur le phénomène de réflexion totale frustrée qui est l'objet de cette étude.

Le doigt est posé à plat sur l'hypoténuse d'un prisme droit isocèle taillé dans un verre d'indice optique noté  $n$ . Il est éclairé par une diode laser de longueur d'onde  $\lambda_0$  dans le vide. L'image de l'empreinte digitale à travers un système optique est formée sur un capteur CCD puis numérisée. La figure 2 décrit le schéma de principe de ce dispositif.



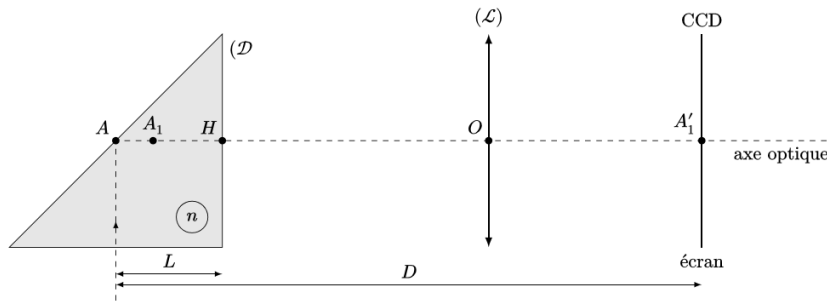
**Figure 1** Capteur d'empreinte digitale  
(Wikimedia, Rachmaninof, 2009-10-21)



**Figure 2** Principe d'un capteur optique d'empreinte digitale

En première approche, le système optique se résume à la traversée d'un dioptre ( $\mathcal{D}$ ) et d'une lentille convergente ( $\mathcal{L}$ ) (figure 3). Si  $A$  est un point objet de l'empreinte digitale, alors on note  $A_1$  l'image de  $A$  à travers le dioptre ( $\mathcal{D}$ ) et  $A_1'$  celle de  $A_1$  à travers la lentille ( $\mathcal{L}$ ) :

$$A \xrightarrow{(\mathcal{D})} A_1 \xrightarrow{(\mathcal{L})} A_1'.$$



**Figure 3** Schéma optique

### ***I.A. Réflexion totale***

**Q 9.** Énoncer soigneusement les lois de Snell-Descartes.

**Q 10.** Définir la réflexion totale et en donner les conditions.

**Q 11.** Étant donné la position de l’empreinte digitale, si on s’en tient strictement à l’énoncé des lois de Descartes, peut-on éclairer le doigt, afin de former son image sur le capteur CCD ? On rappelle que  $n = 1,5$ . (Il faut montrer ici qu’il y a réflexion totale du faisceau d’éclairage !).

Dans le montage proposé, la lentille permettra d’obtenir l’image du doigt sur l’écran du CCD. Néanmoins, il faut aborder l’optique ondulatoire pour comprendre comment le doigt est éclairé au travers du prisme.

### ***I.B – Passage d’une onde électromagnétique sur un dioptr***

#### **I.B.1) Relation de dispersion**

**Q 12.** Rappeler les équations de Maxwell dans une région vide de courant et de charge. En déduire l’équation de propagation d’une onde électromagnétique, sa relation de dispersion, sa vitesse de phase. Le vide est-il dispersif ?

**Q 13.** On admet que dans un milieu linéaire, homogène, isotrope et parfaitement transparent, tout se passe comme si l’on remplaçait dans la relation de dispersion précédente la permittivité du vide  $\epsilon_0$  par la grandeur  $n^2\epsilon_0$ , appelée permittivité du milieu, où  $n$  est l’indice optique du milieu ( $n$  est un réel supérieur à 1). On rappelle que la valeur de l’indice optique d’un matériau varie avec la longueur d’onde  $\lambda_0$  dans le vide. En déduire la nouvelle relation de dispersion et l’expression de la vitesse de phase. Le milieu est-il dispersif ?

#### **I.B.2) Coefficients de réflexion et de transmission**

On considère une onde électromagnétique monochromatique incidente polarisée rectilignement selon la direction  $\vec{e}_y$  et se propageant dans la direction donnée par son vecteur d’onde  $\vec{k}_i = k_{ix}\vec{e}_x + k_{iz}\vec{e}_z$ . On note  $i_1 = (\vec{e}_z, \vec{k}_i)$  l’angle d’incidence de cette onde sur le dioptr plan d’équation  $z = 0$ . Le champ électrique s’écrit :

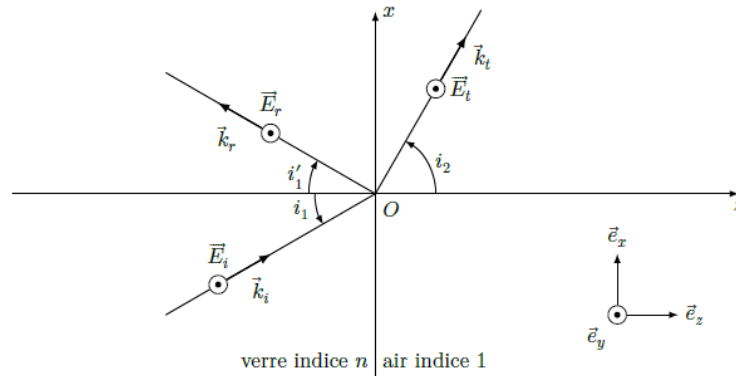
$$\vec{E}_i = E_0 \vec{e}_y \exp(-j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{OM}))$$

On note  $k_0 = \omega/c$ , le module de son vecteur d’onde dans le vide. Au passage du dioptr, cette onde donne naissance :

— à une onde réfléchie  $\vec{E}_r = r E_0 \vec{e}_y \exp(-j(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{OM}))$ ,

— à une onde transmise (onde réfractée)  $\vec{E}_t = t E_0 \vec{e}_y \exp(-j(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{OM}))$ ,

où  $r$  et  $t$  sont des nombres complexes appelées coefficients de réflexion et de transmission en amplitude.



**Figure 7** Réflexion et réfraction d'une onde électromagnétique sur un dioptré

De même, on note  $\vec{k}_r = k_{rx}\vec{e}_x + k_{rz}\vec{e}_z$  (avec  $k_{rz} < 0$ ) et  $\vec{k}_t = k_{tx}\vec{e}_x + k_{tz}\vec{e}_z$

Enfin, on admet que les champs électriques et magnétiques sont continus à la traversée de ce dioptré.

**Q 14.** Montrer que, en tout point du dioptré,  $\exp(jk_{ix}x) + \underline{r}\exp(jk_{rx}x) = \underline{t}\exp(jk_{tx}x)$  (Relation (I.1)).

**Q 15.** En déduire une relation notée (I.2) entre  $\underline{r}$  et  $\underline{t}$ .

**Q 16.** On admet que (I.1) conduit à l'égalité  $k_{ix} = k_{rx} = k_{tx}$ . En déduire les deux relations de Descartes portant sur les angles  $i_1$ ,  $i_1'$  et  $i_2$ .

**Q 17.** À partir de l'étude du champ magnétique, trouver une deuxième équation notée (I.3) reliant  $\underline{r}$  et  $\underline{t}$ .

La solution du système d'équation conduit à  $\underline{r} = \frac{1-\underline{v}}{1+\underline{v}}$  et  $\underline{t} = \frac{2}{1+\underline{v}}$ , où l'on a posé  $\underline{v} = \frac{k_{tz}}{k_{iz}}$ , qui est

éventuellement un nombre complexe. Nous reviendrons sur ces coefficients dans la sous-partie I.C. Néanmoins, on remarque immédiatement qu'on n'a jamais  $\underline{t} = 0$ , même dans le cas d'une réflexion totale. Il y a toujours une onde électromagnétique transmise. Dans la suite de cette sous-partie, nous nous intéressons à la forme que prend cette onde transmise.

**Q 18.** Expliciter les composantes du vecteur d'onde  $\vec{k}_i$  en fonction de  $n$ ,  $k_0$  et  $i_1$ .

**Q 19.** En remarquant que  $k_{iz}^2 = k_0^2 - k_{ix}^2$ , exprimer  $k_{iz}^2$  en fonction de  $n$ ,  $k_0$  et  $i_1$ . En déduire l'expression de  $k_{iz}$  (on distinguera deux cas). Écrire le champ électrique transmis complexe dans les deux cas (sans chercher à expliciter  $\underline{t}$ ).

**Q 20.** Quelle est la forme de l'onde transmise dans le cas d'une réflexion totale ? Comment la qualifie-t-on ? Exprimer la longueur typique, notée  $\delta$ , de pénétration de cette onde dans la direction  $\vec{e}_z$ . Expliquer qualitativement pourquoi il n'y pas, en moyenne, de puissance propagée dans la direction  $\vec{e}_z$ .

### ***I.C – Barrière de potentiel et effet tunnel en physique quantique. Analogie avec la réflexion totale frustrée***

En physique quantique, c'est la description ondulatoire de la matière qui permet d'expliquer l'effet tunnel. En effet, là où une particule décrite dans le cadre de la mécanique classique est arrêtée au pied d'une barrière de potentiel, une particule décrite dans le cadre de la physique quantique voit sa fonction d'onde «déborder» légèrement dans la barrière de potentiel sous forme d'onde évanescence. De la même manière, là où l'optique géométrique interdit à un rayon lumineux de franchir un dioptré en situation de réflexion totale, l'optique ondulatoire montre que l'onde électromagnétique «déborde» légèrement du dioptré sous la forme d'une onde évanescence.

L'objectif de cette sous-partie est donc de construire une analogie entre le comportement d'une onde de de Broglie devant une barrière de potentiel, rencontré en physique quantique, et celui d'une onde électromagnétique dans le cas d'une réflexion totale.

On rappelle que dans le cas d'un état stationnaire la fonction d'onde associée à une particule de masse  $m$

vérifie l'équation de Schrödinger indépendante du temps : dans une modélisation à une dimension spatiale, on écrit sa fonction d'onde  $\Psi(x,t) = \Phi(x) \exp(-j\omega t)$  où  $\Phi(x)$  vérifie l'équation

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Phi(x) + V(x)\Phi(x) = E\Phi(x)$$

où  $E = E_c + V(x)$  est l'énergie totale de la particule,  $E_c$  étant son énergie cinétique.

### I.C.1) Marche de potentiel

On rappelle que la fonction d'onde ainsi que sa dérivée spatiale sont continues en un point qui connaît une variation finie de potentiel. On considère le profil de potentiel suivant, qui présente une marche en  $x = 0$ ,

$$V(x) = 0 \text{ si } x < 0 \text{ et } V(x) = V_0 > 0 \text{ si } x \geq 0$$

et une particule d'énergie  $E$  qui, provenant de la région des  $x$  négatifs, arrive sur la «marche» de potentiel de hauteur  $V_0$ .

**Q 21.** Montrer que dans la région  $x < 0$  où  $V(x) = 0$ , la solution générale est de la forme

$$\Phi_G(x) = A.\exp(jkx) + B.\exp(-jkx)$$

où  $k$  est choisi positif. Exprimer  $k$  en fonction de  $E$  et de la masse  $m$  de la particule.

**Q 22.** Exprimer de même la solution générale de la fonction d'onde dans la région  $x > 0$  sous la forme

$$\Phi_D(x) = C.\exp(jqx) + D.\exp(-jqx).$$

La grandeur  $q$ , éventuellement complexe, est choisie avec  $\Re(q) \geq 0$  et, si  $\Re(q) = 0$ , avec  $\Im(q) > 0$ . En distinguant les situations  $E > V_0$  et  $E < V_0$ , exprimer  $q$  en fonction de  $E$ ,  $V_0$  et  $m$ . Que peut-on dire de  $D$  ?

**Q 23.** Exprimer les coefficients complexes  $\underline{r}$  et  $\underline{t}$  de réflexion et de transmission en amplitude en fonction de la grandeur  $\underline{v} = q/k$ .

**Q 24.** Dans cette question, on se place dans le cas  $E > V_0$ . Rappeler pour une onde plane harmonique l'expression du vecteur densité de courant de probabilité, noté  $\vec{J}$ , en fonction du vecteur d'onde et de la fonction d'onde. Donner la définition des coefficients réels  $R$  et  $T$  de réflexion et de transmission en probabilité en fonction des vecteurs densité de courant de probabilité incident, réfléchi et transmis  $\vec{J}_i$ ,  $\vec{J}_r$  et  $\vec{J}_t$ . En déduire l'expression de  $R$  et  $T$  en fonction de  $v$ ,  $r$ ,  $t$ , puis de  $v$  seulement. Vérifier alors  $R + T = 1$  et interpréter.

**Q 25.** Dans cette question, on se place dans le cas  $E < V_0$ . Expliquer qualitativement pourquoi  $T = 0$ .

### I.C.2) Synthèse I.B.2 et I.C.1

Le tableau ci-dessous met en analogie la barrière de potentiel en physique quantique et le franchissement d'un dioptré en optique ondulatoire.

Barrière de potentiel $V_0 > E$	Réflexion totale $n.\sin i_1 > 1$
$\frac{\hbar q^2}{2m} + V_0 = E$	$k_{tz}^2 + k_{tx}^2 = k_0^2$
$V_0 > 0 \Rightarrow q^2 < 0$ et $q \in j\Re$	$k_{tx}^2 > k_0^2 \Rightarrow \boxed{?_1}$
Onde évanescence : atténuation au lieu de propagation	Onde évanescence : selon $\vec{e}_z$ , atténuation au lieu de propagation
$\underline{v} = \frac{q}{k} = \boxed{?_2}$ et $\underline{r} = \boxed{?_3}$	$\underline{v} = \frac{k_{tz}}{k_{iz}} = \boxed{?_4}$ et $\underline{r} = \frac{1 - \underline{v}}{1 + \underline{v}}$
Existence d'une amplitude de probabilité non nulle au delà de la marche de potentiel (sur une petite profondeur $\delta$ )	Existence de $\boxed{?_5}$ non nul au delà du dioptré (sur une petite profondeur $\delta$ )

**Q 26.** Donner le contenu des cinq masques  du tableau.

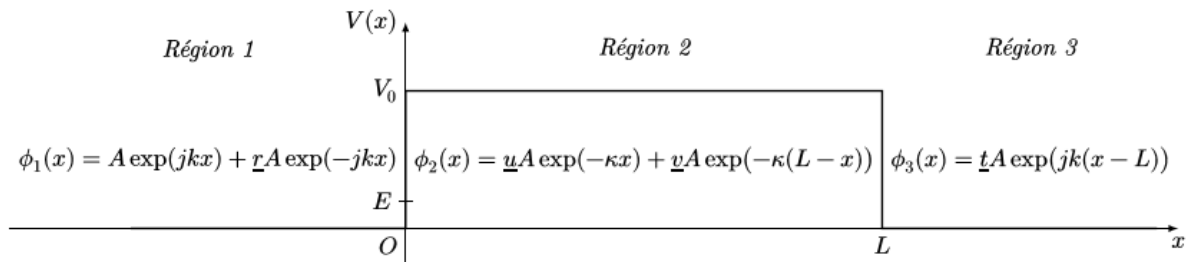
### I.C.3) Effet tunnel et réflexion totale frustrée

Soit le profil de potentiel

$$V(x) = 0 \text{ si } x < 0 \text{ et } x > L \text{ et } V(x) = V_0 > 0 \text{ si } 0 < x < L$$

On suppose  $E < V_0$  et on pose  $\kappa = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$  et  $\nu = \frac{\kappa}{k}$  où  $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ .

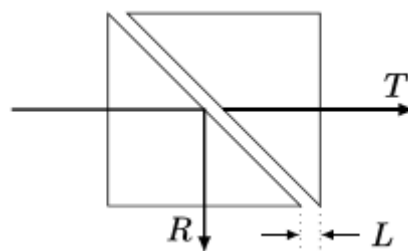
On considère une particule d'énergie  $E$  qui provient de la région des  $x$  négatifs. La figure 8 donne sa fonction d'onde dans les trois régions du potentiel. On montre alors que le coefficient  $T$  de transmission en probabilité s'écrit  $T \approx \exp(-2\kappa L)$ .



**Figure 8** Formes d'une onde de de Broglie dans une barrière de potentiel

L'effet tunnel est associé au fait que l'onde évanescence dans la barrière « déborde » légèrement au-delà de la barrière pour transmettre dans la Région 3 une onde à nouveau progressive. De manière analogue, dans la situation de la réflexion totale, l'onde électromagnétique « déborde » légèrement au-delà du dioptré dans la situation d'une réflexion totale si bien qu'en approchant un deuxième dioptré, on peut permettre la transmission d'une onde progressive, ce qui est la réflexion totale frustrée. Cette sous-partie propose d'étudier cette configuration en développant l'analogie avec l'effet tunnel.

On considère une onde électromagnétique subissant une réflexion totale dans un prisme rectangle isocèle d'indice  $n = 1,5$ . On approche tête-bêche un second prisme rectangle isocèle du premier, de sorte que leurs hypoténuses respectives soient parallèles entre elles, comme indiqué sur la figure 9, et on note  $L$  la distance qui les sépare dans la direction horizontale. Les coefficients  $T$  et  $R$  désignent respectivement les coefficients de transmission et de réflexion en énergie. Lorsque  $L$  tend vers l'infini, on retrouve la situation d'un seul prisme avec une réflexion totale, à savoir  $T = 0$  et  $R = 1$ . Mais lorsque  $L$  devient suffisamment petit,  $T$  n'est plus nul : c'est le phénomène de réflexion totale frustrée.



**Figure 9**

**Q 27.** On suppose que la crête d'un sillon est en contact avec le prisme et que le creux d'un sillon en est distant de  $e = 30 \mu\text{m}$ . La diode laser émet à la longueur d'onde  $\lambda_0 = 630 \text{ nm}$ . À l'aide de l'analogie développée, évaluer le coefficient de transmission en puissance du creux du sillon. Conclure l'étude en expliquant en quoi le dispositif d'un tel capteur optique d'empreinte digitale repose sur le principe de réflexion totale frustrée.

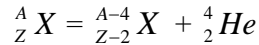


## II Stockage de déchets radioactifs à haute activité

### II.A – Énergie cinétique des particules $\alpha$ émises et émission thermique d'un échantillon radioactif

#### II.A.1) Quelques données sur la radioactivité alpha

La radioactivité alpha est le processus de désintégration d'un nucléide radioactif  ${}^A_Z X$  selon le bilan suivant



où le noyau  ${}^4_2 He$  est appelé particule alpha, tandis que le noyau  ${}^A_Z X$  est appelé père et le noyau  ${}^{A-4}_{Z-2} X$  fils. En pratique, la radioactivité alpha concerne les noyaux lourds,  $Z \approx 82 - 96$  et  $A \approx 210 - 250$ .

La constante radioactive  $\lambda$  du radionucléide est son taux de désintégration par seconde. En notant  $N(t)$  le nombre de radionucléides dans un échantillon donné,

$$\lambda = - \frac{dN}{dt} \cdot \frac{1}{N(t)}.$$

La durée de demi-vie est le temps  $T = \ln 2 / \lambda$  pendant lequel la moitié des radionucléides d'un échantillon donné se désintègrent.

L'activité d'un radionucléide, exprimée en becquerels (Bq), est le nombre de désintégrations par seconde observées dans un échantillon donné.

La figure 10 met en relation les durées de demi-vie et l'énergie des particules alpha  $E_\alpha$  de quelques isotopes de l'uranium ( $Z = 92$ ) et du polonium ( $Z = 84$ ). La loi vérifiée empiriquement (courbe passant au milieu des points expérimentaux) est

$$\log_{10} T = \frac{C_1}{\sqrt{E_\alpha}} + C_2$$

où, pour un élément chimique donné,  $C_1$  et  $C_2$  sont deux constantes.

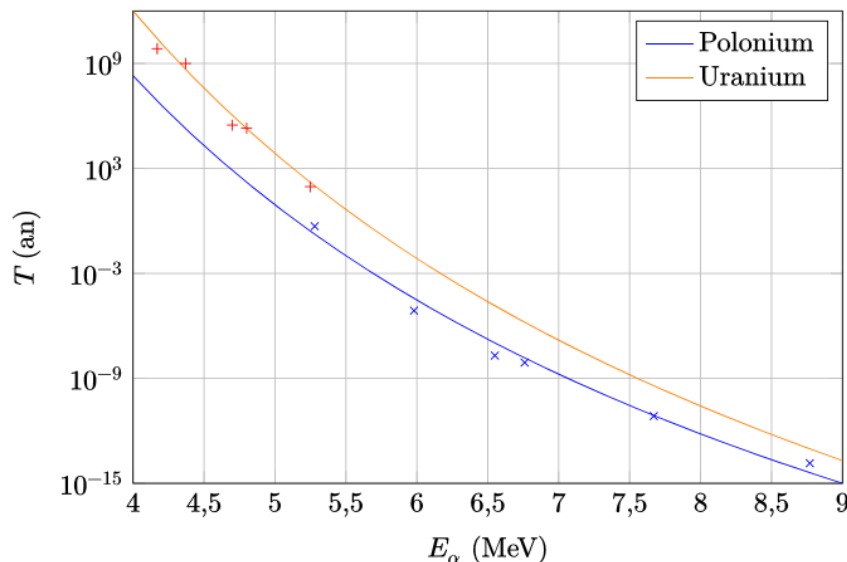
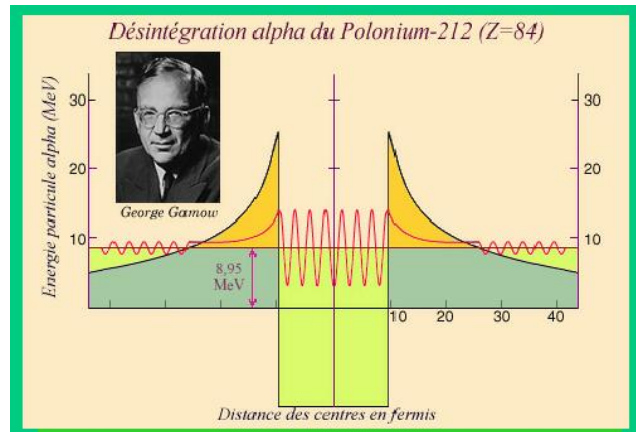
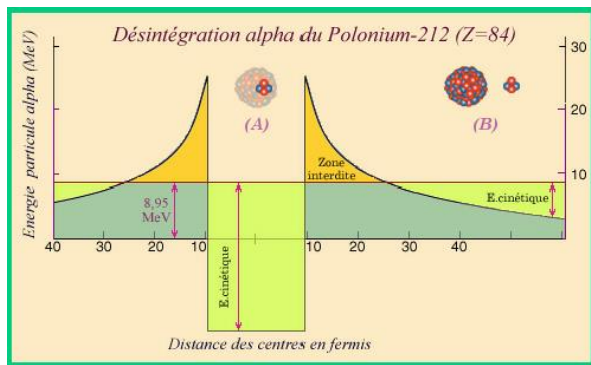


Figure 10 Demi-vie fonction de  $E_\alpha$

#### II.A.2) Modèle de Gamow (1928)

On suppose que la particule alpha préexiste à l'intérieur du noyau  ${}^A_Z X$  et est piégée dans un puits de potentiel qui modélise l'interaction forte entre nucléons, dont la portée n'excède pas une dizaine de femtomètres, soit le rayon du noyau, noté  $R$ . À l'extérieur du noyau, soit à une distance  $r > R$  comptée depuis son centre, c'est l'interaction coulombienne, répulsive, entre la particule alpha  ${}^4_2 He$  (de charge  $+2e$ , où  $e$  est la charge élémentaire) et le noyau fils  ${}^{A-4}_{Z-2} X$  (de charge  $+(Z-2)e$ ) qui prédomine.

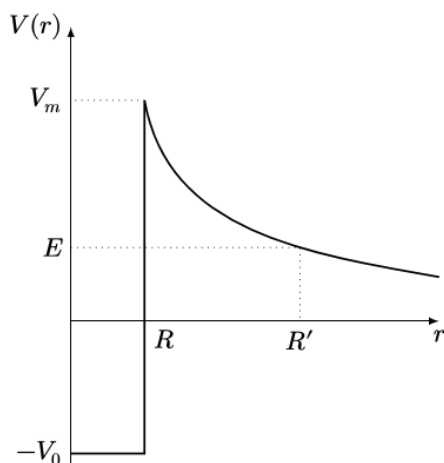


**Figure 11** D'après <http://www.laradioactivite.com/>

Classiquement, la barrière de potentiel assure la stabilité du noyau. Gamow interprète la radioactivité alpha par effet tunnel. L'onde de matière associée à la particule alpha n'est pas strictement localisée si bien qu'il existe une probabilité de l'observer en dehors du noyau. La particule alpha, à l'intérieur du noyau, possède une énergie cinétique : elle vient heurter la barrière à une fréquence  $f$ , il y a une probabilité  $P$  qu'elle traverse la barrière de potentiel. On montre alors que la constante radioactive s'écrit  $\lambda = Pf$ .

### Calcul de l'effet tunnel

L'énergie potentielle coulombienne, appelée abusivement « potentiel » selon les habitudes de la physique quantique, est notée  $V(r)$ .



$$V_0 \approx 10 \text{ MeV}$$

$$V_m = V(R) \text{ avec } R \approx 7,5 - 8,5 \text{ fm}$$

$$R' \text{ tel que } V(R') = E$$

**Figure 12**

Le calcul de la probabilité de transmission par effet tunnel pour le profil illustré figure 12 a été proposé en 1926 par Brillouin, Kramers et Wentzel (approximation dite BKW) et s'exprime ainsi :

$$P = \exp(-\gamma) \text{ avec } \gamma = \frac{2}{\hbar} \int_R^{R'} \sqrt{2m(V(r) - E_\alpha)} dr.$$

En introduisant la constante  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$  appelée constante de structure fine, on obtient :

$$\gamma \approx 2(Z-2)\alpha\sqrt{2mc^2} \left( \frac{\pi}{\sqrt{E_\alpha}} - \frac{4}{\sqrt{V_m}} \right)$$

La fréquence de collision de la particule alpha avec la barrière s'obtient par une approche classique :

$$f = \frac{c}{2R} \sqrt{\frac{2(E_\alpha + V_0)}{mc^2}}$$

### II.A.3) Questions

**Q 28.** Écrire l'énergie potentielle d'interaction coulombienne, notée  $V(r)$ , entre la particule alpha et le noyau fils, en fonction de  $Z$ ,  $e$  et de la distance  $r$  qui les sépare. On introduira la constante de structure fine.

**Q 29.** Justifier la formule  $T = \ln 2 / \lambda$ .

**Q 30.** Exprimer l'énergie cinétique de la particule alpha, en fonction de son énergie mécanique  $E_\alpha$ , quand elle est à l'intérieur du puits. Justifier la formule

$$f = \frac{c}{2R} \sqrt{\frac{2(E_\alpha + V_0)}{mc^2}}.$$

**Q 31.** Avec  $\lambda = Pf$ , et moyennant des approximations qu'on explicitera, justifier la formule empirique pour un élément chimique

$$\log_{10} T = \frac{C_1}{\sqrt{E_\alpha}} + C_2.$$

**Q 32.** On considère un échantillon radioactif alpha d'activité massique  $A_m = 3 \times 10^{10} \text{ Bq} \cdot \text{g}^{-1}$ . Définir la grandeur intensive « émission thermique massique de l'échantillon », notée  $w$  ( $\text{W} \cdot \text{kg}^{-1}$ ). Estimer un ordre de grandeur de  $w$ .

**Q 33.** Que représente la grandeur  $\rho w$  où  $\rho$  est la masse volumique de l'échantillon ?

### Données

Célérité de la lumière dans le vide

$$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Constante d'Avogadro

$$N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

Charge élémentaire

$$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

Permittivité du vide

$$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$$

Électron-volt

$$1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Constante de Planck réduite

$$\hbar = 6,582 \times 10^{-16} \text{ eV} \cdot \text{s}$$

Constante de structure fine

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

Masse de la particule alpha

$$m = 3727 \text{ MeV}/c^2$$

### Préfixes du système international d'unités

Facteur	Nom	Symbole	Facteur	Nom	Symbole
$10^1$	déca	da	$10^{-1}$	déci	d
$10^2$	hecto	h	$10^{-2}$	centi	c
$10^3$	kilo	k	$10^{-3}$	milli	m
$10^6$	méga	M	$10^{-6}$	micro	μ
$10^9$	giga	G	$10^{-9}$	nano	n
$10^{12}$	téra	T	$10^{-12}$	pico	p
$10^{15}$	péta	P	$10^{-15}$	femto	f
$10^{18}$	exa	E	$10^{-18}$	atto	a
$10^{21}$	zetta	Z	$10^{-21}$	zepto	z
$10^{24}$	yotta	Y	$10^{-24}$	yocto	y