ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026 22/01/2026

Devoir en temps libre n°13

Problème I

Soit E euclidien. On définit l'ensemble des endomorphismes *symétriques définis positifs* par

$$\mathscr{S}^{++}(\mathrm{E}) = \{f \in \mathscr{S}(\mathrm{E}) \mid \forall x \in \mathrm{E} \setminus \{0_{\mathrm{E}}\} \quad \langle f(x), x\rangle > 0\}$$

Aucun résultat sur $\mathscr{S}^{++}(\mathrm{E})$ n'est supposé connu. Soit $u \in \mathscr{S}^{++}(\mathrm{E})$.

1. Montrer, sans recours au théorème spectral, que $u \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$ puis établir $u^{-1} \in \mathscr{S}^{++}(\mathrm{E})$.
2. Justifier qu'il existe $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de u et que $\mathrm{Sp}\,(u) \subset \,]\,0\,; +\infty\,[$.
3. On pose $\qquad \forall \lambda > 0 \qquad \theta(\lambda) = \dfrac{\lambda}{\alpha} + \dfrac{\alpha}{\lambda} \quad$ avec $\quad \alpha = \sqrt{\lambda_{\min}\lambda_{\max}}$

   (a) Étudier les variations de θ.

   (b) En déduire $\qquad \forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(u) \qquad \theta(\lambda) \leqslant \sqrt{\dfrac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}} + \sqrt{\dfrac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}}$

4. Établir $\qquad \forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^2 \qquad \sqrt{ab} \leqslant \dfrac{1}{2}(a+b)$

   En déduire

   $$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \sqrt{\langle u(x), x\rangle \langle u^{-1}(x), x\rangle} \leqslant \frac{1}{2}\left\langle \left(\frac{1}{\alpha}u + \alpha u^{-1}\right)(x), x\right\rangle$$

5. Pour $x \in \mathrm{E}$ avec $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ et les x_i réels, déterminer une expression simple de $\left\langle \left(\dfrac{1}{\alpha}u + \alpha u^{-1}\right)(x), x\right\rangle$ en fonction des x_i, λ_i et θ.
6. Conclure en montrant l'*inégalité de Kantorovich* :

   $$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \langle u(x), x\rangle \langle u^{-1}(x), x\rangle \leqslant \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}} + \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}}\right)^2 \|x\|^4$$

Problème II

Montrer que l'application

$$\varphi\colon \begin{cases} \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ \qquad (\mathrm{O}, \mathrm{S}) \longmapsto \mathrm{OS} \end{cases}$$

est un *homéomorphisme*, *i.e.* une application bijective, continue dont la réciproque est continue.

On pourra commencer par redémontrer l'existence et unicité d'une racine carrée matricielle dans $\mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.