ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°55

Exercice 1 (**)

Soit E euclidien et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Établir

$$\mathrm{Im}\ u^* = (\mathrm{Ker}\ u)^\perp \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}\ u^* = (\mathrm{Im}\ u)^\perp$$

Corrigé : On a

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}\ u^* \iff u^*(x) \in \mathrm{E}^\perp &\iff \forall y \in \mathrm{E} \quad \langle u^*(x), y\rangle = 0 \\ &\iff \forall y \in \mathrm{E} \quad \langle x, u(y)\rangle = 0 \iff x \in (\mathrm{Im}\ u)^\perp \end{aligned}$$

En appliquant cette relation à u^* au lieu de u puis en passant à l'orthogonal, on conclut

$$\boxed{\mathrm{Im}\ u^* = (\mathrm{Ker}\ u)^\perp \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}\ u^* = (\mathrm{Im}\ u)^\perp}$$

Exercice 2 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ avec n entier non nul nul et a un vecteur normé de E. Déterminer la matrice dans la base canonique de $s_{\mathrm{Vect}\,(a)^\perp}$.

Corrigé : Soit $x \in \mathrm{E}$. Notons $\mathrm{S} = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}} s_{\mathrm{Vect}\,(a)^\perp}$, $\mathrm{A} = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}} a$ et $\mathrm{X} = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}} x$. On a

$$s_{\mathrm{Vect}\,(a)^\perp}(x) = x - 2\langle x, a\rangle a$$

Matriciellement, en exploitant l'associativité du produit matriciel, on trouve

$$\begin{aligned} \forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \qquad \mathrm{SX} &= \mathrm{X} - 2\mathrm{A}\langle \mathrm{A}, \mathrm{X}\rangle \\ &= \mathrm{X} - 2\mathrm{A}(\mathrm{A}^\top \mathrm{X}) = \mathrm{X} - 2(\mathrm{A}\mathrm{A}^\top)\mathrm{X} = (\mathrm{I}_n - 2\mathrm{A}\mathrm{A}^\top)\mathrm{X} \end{aligned}$$

Ainsi $$\boxed{\mathrm{S} = \mathrm{I}_n - 2\mathrm{A}\mathrm{A}^\top}$$

Exercice 3 (*)

Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ avec n entier non nul. Montrer :

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}$$

Corrigé : 1. Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique. En considérant $\mathrm{B} = \big(b_{i,j}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{E}$ avec

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2 \qquad b_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{i,j} > 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

il vient

$$\langle \mathrm{A}, \mathrm{B}\rangle = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}| \qquad \|\mathrm{A}\|^2 = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^\top \mathrm{A}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{I}_n) = n \qquad \|\mathrm{B}\|^2 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} b_{i,j}^2 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} 1 = n^2$$

Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on conclut

$$\boxed{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| = \langle \mathrm{A}, \mathrm{B}\rangle \leqslant \|\mathrm{A}\|\|\mathrm{B}\| = n\sqrt{n}}$$

Variante : On peut aussi majorer $\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \leqslant \sqrt{n}$ en invoquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ et en utilisant le fait que les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ puis sommer en j.

Exercice 4 (*)

Soit E euclidien. Soient F et G des sev orthogonaux de E. Montrer que

$$s_{\mathrm{F}} \circ s_{\mathrm{G}} = s_{\mathrm{G}} \circ s_{\mathrm{F}} = s_{(\mathrm{F}\oplus\mathrm{G})^{\perp}}$$

Corrigé : On a la somme directe

$$\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G} \oplus (\mathrm{F} \oplus \mathrm{G})^{\perp}$$

Pour $x \in \mathrm{E}$, on décompose $x = a + b + c$ avec $(a, b, c) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G} \times (\mathrm{F} \oplus \mathrm{G})^{\perp}$. Puis

$$s_{\mathrm{F}} \circ s_{\mathrm{G}}(x) = s_{\mathrm{F}}(-a + b - c) = -a - b + c \quad \text{et} \quad s_{(\mathrm{F}\oplus\mathrm{G})^{\perp}}(x) = -a - b + c$$

La dernière égalité vient par symétrie des rôles et on conclut

$$\boxed{s_{\mathrm{F}} \circ s_{\mathrm{G}} = s_{\mathrm{G}} \circ s_{\mathrm{F}} = s_{(\mathrm{F}\oplus\mathrm{G})^{\perp}}}$$

Exercice 5 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec n entier non nul nul muni du produit scalaire canonique. On pose

$$\forall \mathrm{M} \in \mathrm{E} \qquad \varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{M} - \frac{2}{n}\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})\mathrm{I}_n$$

1. Montrer que $\varphi \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$. Calculer φ^2 puis décrire φ.
2. Soit $\psi \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$. Décrire $\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}$.

Corrigé : 1. On a $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ sans difficulté puis on vérifie

$$\forall (\mathrm{M}, \mathrm{N}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle \varphi(\mathrm{M}), \varphi(\mathrm{N})\rangle = \langle \mathrm{M}, \mathrm{N}\rangle$$

Ainsi $$\boxed{\varphi \in \mathcal{O}(\mathrm{E})}$$

On trouve $$\varphi^2 = \mathrm{id} \quad \text{et} \quad \varphi(\mathrm{I}_n) = -\mathrm{I}_n$$

Ainsi, l'application φ est une symétrie et une isométrie donc une symétrie orthogonale. Pour $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$, il vient

$$\varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{M} \iff \mathrm{M} \in \mathrm{Ker}\ \mathrm{Tr}$$

d'où $\mathrm{Ker}\,(\varphi - \mathrm{id}\,) = \mathrm{Ker}\ \mathrm{Tr}$. On a $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_n) \subset \mathrm{Ker}\,(\varphi + \mathrm{id}\,)$ et on sait que pour une symétrie orthogonale

$$\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\,(\varphi - \mathrm{id}\,) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}\,(\varphi + \mathrm{id}\,)$$

Comme $\mathrm{Ker}\,(\varphi - \mathrm{id}\,)$ est un hyperplan, son supplémentaire $\mathrm{Ker}\,(\varphi - \mathrm{id}\,)$ est une droite vectorielle et on conclut

$$\boxed{\text{L'application } \varphi \text{ est la symétrie orthogonale par rapport à } \mathrm{Ker}\ \mathrm{Tr} \text{ parallèlement à } \mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_n).}$$

Ce résultat est en fait flagrant sur l'écriture de $\varphi(\mathrm{M})$ pour $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$. Posant $\mathrm{U} = \mathrm{I}_n/\|\mathrm{I}_n\| = \mathrm{I}_n/\sqrt{n}$, on a

$$\forall \mathrm{M} \in \mathrm{E} \qquad \varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{M} - 2\langle \mathrm{M}, \mathrm{U}\rangle \mathrm{U}$$

On reconnaît alors $\boxed{\varphi = s_{\mathrm{Vect}\,(\mathrm{U})^\perp} = s_{\mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_n)^\perp}}$

2. Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$. On a

$$\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}(\mathrm{M}) = \psi\left(\psi^{-1}(\mathrm{M}) - 2\langle \psi^{-1}(\mathrm{M}), \mathrm{U}\rangle \mathrm{U}\right) = \mathrm{M} - 2\langle \psi^{-1}(\mathrm{M}), \mathrm{U}\rangle \psi(\mathrm{U})$$

Par conservation du produit scalaire ou en observant $\psi^{-1} = \psi^*$, on a

$$\langle \psi^{-1}(\mathrm{M}), \mathrm{U}\rangle = \langle \mathrm{M}, \psi(\mathrm{U})\rangle$$

Ainsi $$\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}(\mathrm{M}) = \mathrm{M} - 2\langle \mathrm{M}, \psi(\mathrm{U})\rangle \psi(\mathrm{U})$$

D'où $\boxed{\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1} = s_{\mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_n)^\perp}}$

Exercice 6 (**)

Dans E euclidien, soit $u \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ et $v = \mathrm{id} - u$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}\ v = (\mathrm{Im}\ v)^\perp$.
2. Montrer que pour $x \in \mathrm{E}$, $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} \|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} u^k(x) - p_{\mathrm{Ker}\ v}(x)\| = 0$

Corrigé : 1. Soit $(x, y) \in \mathrm{Ker}\ v \times \mathrm{E}$. On a

$$\langle x, v(y)\rangle = \langle x, y\rangle - \underbrace{\langle x, u(y)\rangle}_{=\langle u(x), u(y)\rangle} = 0$$

D'où $\mathrm{Ker}\ v \subset \mathrm{Im}\ v^\perp$ et par égalité des dimensions avec le théorème du rang, on conclut

$$\boxed{\mathrm{Ker}\ v = (\mathrm{Im}\ v)^\perp}$$

2. On a $$\mathrm{E} = \mathrm{Im}\ v \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}\ v$$

Soit $x \in \mathrm{E}$. On décompose $x = (b - u(b)) + a$ avec $(b, a) \in \mathrm{E} \times \mathrm{Ker}\ v$. On a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[u^k(b) - u^{k+1}(b)\right] + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a = \frac{1}{n}(b - u^n(b)) + a$$

Comme $u \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$, on a également $u^n \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ puis

$$\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k(x) - p_{\mathrm{Ker}\ v}(x)\| \leqslant \frac{1}{n}\left(\|b\| + \|u^n(b)\|\right) = \frac{2\|b\|}{n}$$

On conclut $$\boxed{\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k(x) - p_{\mathrm{Ker}\ v}(x)\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0}$$

Exercice 7 (**)

Soit a vecteur unitaire d'un espace euclidien E, α un réel et f_α définie par

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad f_\alpha(x) = x + \alpha\langle x, a\rangle a$$

1. Justifier que $f_\alpha \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
2. Montrer que $f_\alpha \in \mathrm{GL}(\mathrm{E}) \iff \alpha \neq -1$. Décrire f_{-1}.
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α pour avoir $f_\alpha \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$. Quand la condition est réalisée, décrire f_α.

Corrigé : 1. L'application f_α est clairement à valeurs dans E, linéaire par linéarité du produit scalaire en la première variable. Ainsi

$$\boxed{f_\alpha \in \mathscr{L}(\mathrm{E})}$$

2. On complète la famille (a) en $\mathscr{B}$ base orthonormée de E. Par suite, on a $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} f_\alpha = \mathrm{diag}(1 + \alpha, 1, \ldots, 1)$. On en déduit $\det f_\alpha = 1 + \alpha$ et

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad f_{-1}(x) = x - \langle x, a\rangle a = (\mathrm{id} - p_{\mathrm{Vect}\,(a)})(x) = p_{\mathrm{Vect}\,(a)^\perp}(x)$$

Ainsi $$\boxed{f_\alpha \in \mathrm{GL}(\mathrm{E}) \iff \alpha \neq -1 \quad \text{et} \quad f_{-1} = p_{\mathrm{Vect}\,(a)^\perp}}$$

3. On a $$f_\alpha \in \mathcal{O}(\mathrm{E}) \iff \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} f_\alpha \in \mathcal{O}(n)$$

et clairement $$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} f_\alpha \in \mathcal{O}(n) \iff (1+\alpha)^2 = 1 \iff \alpha \in \{0, -2\}$$

On conclut $$\boxed{f_\alpha \in \mathcal{O}(\mathrm{E}) \iff \alpha \in \{0, -2\} \quad \text{et} \quad f_0 = \mathrm{id}\,, \quad f_{-2} = s_{\mathrm{Vect}\,(a)^\perp}}$$

Exercice 8 (**)

Soit E euclidien et F, G des sev de E.

1. Déterminer $(\mathrm{F} + \mathrm{G})^\perp$.
2. En déduire $(\mathrm{F} \cap \mathrm{G})^\perp$.
3. On suppose $\mathrm{F}^\perp \perp \mathrm{G}^\perp$. Montrer

$$p_{\mathrm{F}} + p_{\mathrm{G}} - p_{\mathrm{F}\cap\mathrm{G}} = \mathrm{id} \qquad \text{et} \qquad p_{\mathrm{F}} \circ p_{\mathrm{G}} = p_{\mathrm{G}} \circ p_{\mathrm{F}} = p_{\mathrm{F}\cap\mathrm{G}}$$

Corrigé : 1. On a $\mathrm{F} \subset \mathrm{F} + \mathrm{G}$ et $\mathrm{G} \subset \mathrm{F} + \mathrm{G}$ d'où $(\mathrm{F} + \mathrm{G})^\perp \subset \mathrm{F}^\perp$ et $(\mathrm{F} + \mathrm{G})^\perp \subset \mathrm{G}^\perp$. Ainsi, on a $(\mathrm{F} + \mathrm{G})^\perp \subset \mathrm{F}^\perp \cap \mathrm{G}^\perp$. Réciproquement, soit $x \in \mathrm{F}^\perp \cap \mathrm{G}^\perp$ et $(u, v) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G}$. On a

$$\langle x, u + v\rangle = \langle x, u\rangle + \langle x, v\rangle = 0$$

d'où l'inclusion $\mathrm{F}^\perp \cap \mathrm{G}^\perp \subset (\mathrm{F} + \mathrm{G})^\perp$ et par conséquent

$$\boxed{\mathrm{F}^\perp \cap \mathrm{G}^\perp = (\mathrm{F} + \mathrm{G})^\perp}$$

2. En appliquant le résultat antérieur à $\mathrm{F}^\perp$ et $\mathrm{G}^\perp$, il vient

$$\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = (\mathrm{F}^\perp + \mathrm{G}^\perp)^\perp$$

Passant à l'orthogonal, on obtient $$\boxed{(\mathrm{F} \cap \mathrm{G})^\perp = \mathrm{F}^\perp + \mathrm{G}^\perp}$$

3. On a $$\mathrm{E} = \mathrm{F}^\perp \oplus \mathrm{G}^\perp \oplus (\mathrm{F}^\perp \oplus \mathrm{G}^\perp)^\perp = \mathrm{F}^\perp \oplus \mathrm{G}^\perp \oplus (\mathrm{F} \cap \mathrm{G})$$

Soit $x \in \mathrm{E}$. On décompose

$$x = a + b + c \quad \text{avec} \quad (a, b, c) \in \mathrm{F}^\perp \times \mathrm{G}^\perp \times (\mathrm{F} \cap \mathrm{G})$$

Il vient $$p_\mathrm{F}(x) = b + c \qquad p_\mathrm{G}(x) = a + c \qquad p_{\mathrm{F}\cap\mathrm{G}}(x) = c$$

d'où $$(p_\mathrm{F} + p_\mathrm{G} - p_{\mathrm{F}\cap\mathrm{G}})(x) = a + b + c = x$$

et $$p_\mathrm{F} \circ p_\mathrm{G}(x) = p_\mathrm{F}(a + c) = c = p_{\mathrm{F}\cap\mathrm{G}}(x)$$

et l'autre égalité suit par symétrie des rôles. Ainsi

$$\boxed{p_\mathrm{F} + p_\mathrm{G} - p_{\mathrm{F}\cap\mathrm{G}} = \mathrm{id} \quad \text{et} \quad p_\mathrm{F} \circ p_\mathrm{G} = p_\mathrm{G} \circ p_\mathrm{F} = p_{\mathrm{F}\cap\mathrm{G}}}$$

Variante : Avec la décomposition en somme directe

$$\mathrm{E} = \mathrm{F}^\perp \oplus \mathrm{G}^\perp \oplus (\mathrm{F}^\perp \oplus \mathrm{G}^\perp)^\perp = \mathrm{F}^\perp \oplus \mathrm{G}^\perp \oplus (\mathrm{F} \cap \mathrm{G})$$

en considérant la famille de projecteurs associés, il vient

$$p_{\mathrm{F}^\perp} + p_{\mathrm{G}^\perp} + p_{\mathrm{F}\cap\mathrm{G}} = \mathrm{id}$$

autrement dit $$\mathrm{id} - p_\mathrm{F} + \mathrm{id} - p_\mathrm{G} + p_{\mathrm{F}\cap\mathrm{G}} = \mathrm{id}$$

et on retrouve la première égalité. En composant celle-ci par p_F à droite ou gauche, il vient

$$p_\mathrm{F} = p_\mathrm{F} \circ \mathrm{id} = p_\mathrm{F} \circ (p_\mathrm{F} + p_\mathrm{G} - p_{\mathrm{F}\cap\mathrm{G}}) = p_\mathrm{F} + p_\mathrm{F} \circ p_\mathrm{G} - \underbrace{p_\mathrm{F} \circ p_{\mathrm{F}\cap\mathrm{G}}} = p_{\mathrm{F}\cap\mathrm{G}}$$

et de même avec p_G pour les dernières égalités.

Exercice 9 (**)

Soit E euclidien de dimension n entier non nul, $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E et $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{E}^n$. Montrer

$$|\det_\mathscr{B}(x_1, \ldots, x_n)| \leqslant \prod_{k=1}^{n} \|x_k\|$$

Corrigé : Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est liée, l'inégalité est vraie. Supposons $(x_1, \ldots, x_n)$ libre et soit $\mathscr{L} = (v_1, \ldots, v_n)$ la base orthonormée obtenue par l'algorithme de Gram-Schmidt appliqué à $(x_1, \ldots, x_n)$. On note $\mathrm{P} = \mathrm{mat}_\mathscr{B}\mathscr{L}$. On a

$$\mathrm{mat}_\mathscr{B}(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{mat}_\mathscr{B}\mathscr{L} \times \mathrm{mat}_\mathscr{L}(x_1, \ldots, x_n)$$

La matrice P est matrice de passage entre deux bases orthonormées de E d'où $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Par suite

$$\det_\mathscr{B}(x_1, \ldots, x_n) = \det(\mathrm{P}) \det_\mathscr{L}(x_1, \ldots, x_n) = \pm \det_\mathscr{L}(x_1, \ldots, x_n)$$

et $$\mathrm{mat}_\mathscr{L}(x_1, \ldots, x_n) = \big(\langle x_j, v_i \rangle\big)_{(i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2}$$

Or, on a $$\forall k \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad \mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_k) = \mathrm{Vect}\,(v_1, \ldots, v_k)$$

d'où $$\forall i > j \qquad \langle x_j, v_i \rangle = 0$$

en le voyant soit par orthogonalité, soit parce que x_j est combinaison linéaire de $(v_1, \ldots, v_j)$ d'où la nullité des coefficients en v_i pour $i > j$. Ainsi

$$\mathrm{mat}_\mathscr{L}(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} \langle x_1, v_1 \rangle & \ldots & \ldots & \langle x_n, v_1 \rangle \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \langle x_n, v_n \rangle \end{pmatrix}$$

Ainsi $$|\det_{\mathscr{B}}(x_1,\ldots,x_n)| = \prod_{k=1}^{n} |\langle x_k, v_k\rangle|$$

et $$\forall k \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad \|x_k\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \langle x_k, v_i\rangle^2} \geqslant |\langle x_k, v_k\rangle|$$

Finalement $$\boxed{|\det_{\mathscr{B}}(x_1,\ldots,x_n)| \leqslant \prod_{k=1}^{n} \|x_k\|}$$

Remarque : Il s'agit de *l'inégalité d'Hadamard.*

Exercice 10 (**)

Soit E euclidien de dimension n entier non nul et $(u_1,\ldots,u_n) \in \mathrm{E}^n$. On pose

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad f(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i\rangle u_i$$

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
2. Si $(u_1,\ldots,u_n)$ est une base orthonormée de E, déterminer f.
3. On suppose $f \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$.
   (a) Montrer que $(u_1,\ldots,u_n)$ est une base de E.
   (b) Pour $i \in [\![1\,;\,n]\!]$, calculer $\langle f(u_i), u_i\rangle$ et en déduire que $\|u_i\| \in \,]\,0\,;1\,]$.
   (c) Pour $i \in [\![1\,;\,n]\!]$, en considérant $x \in \mathrm{Vect}\,\left((u_k)_{k\in[\![1\,;\,n]\!]\smallsetminus\{i\}}\right)^{\perp} \smallsetminus \{0_{\mathrm{E}}\}$, montrer que $(u_1,\ldots,u_n)$ est une base orthonormée.

Corrigé : 1. Immédiat.

2. On trouve $$\boxed{f = p_{\mathrm{Vect}\,(u_1,\ldots,u_n)} = \mathrm{id}}$$

3.(a) On a $$\mathrm{E} = \mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Vect}\,(u_1,\ldots,u_n) \subset \mathrm{E}$$

La famille $(u_1,\ldots,u_n)$ est génératrice et de cardinal $\dim \mathrm{E}$ d'où

$$\boxed{\text{La famille } (u_1,\ldots,u_n) \text{ est une base de E.}}$$

3.(b) Soit $i \in [\![1\,;\,n]\!]$. On a

$$\langle f(u_i), u_i\rangle = \|u_i\|^4 + \sum_{k\in[\![1\,;\,n]\!]\smallsetminus\{i\}} \langle u_k, u_i\rangle^2$$

et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\langle f(u_i), u_i\rangle \leqslant \|f(u_i)\|\|u_i\| = \|u_i\|^2$$

Ainsi $$\|u_i\|^4 \leqslant \|u_i\|^2$$

D'où $$\boxed{\forall i \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad \|u_i\| \in \,]\,0\,;1\,]}$$

3.(c) Soit $i \in [\![1\,;\,n]\!]$ et $x \in \mathrm{Vect}\,\left((u_k)_{k\in[\![1\,;\,n]\!]\smallsetminus\{i\}}\right)^{\perp} \smallsetminus \{0_{\mathrm{E}}\}$. Un tel choix est possible puisque

$$\dim \mathrm{Vect}\,\left((u_k)_{k\in[\![1\,;\,n]\!]\smallsetminus\{i\}}\right)^{\perp} = \dim \mathrm{E} - \dim \mathrm{Vect}\,\left((u_k)_{k\in[\![1\,;\,n]\!]\smallsetminus\{i\}}\right) = 1$$

On a $$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, u_k\rangle\, u_k = \langle x, u_i\rangle\, u_i$$

Puis, avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\|x\| = \|f(x)\| \leqslant \|x\|\|u_i\|^2 \leqslant \|x\|$$

d'où $\|u_i\| = 1$ puis en reprenant l'inégalité de la question 3.(b)

$$\langle f(u_i), u_i \rangle = \|u_i\|^4 + \sum_{k \neq i} \langle u_k, u_i \rangle^2 \leqslant \|u_i\|^2 \iff \sum_{k \neq i} \langle u_k, u_i \rangle^2 = 0$$

On conclut $\boxed{\text{La famille } (u_1, \ldots, u_n) \text{ est une base orthonormée.}}$

Variante : Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut raisonner ainsi

$$\|x\| = \|f(x)\| = \|\langle x, u_i \rangle u_i\| \leqslant |\langle x, u_i \rangle| \, \|u_i\| \leqslant \|x\|\|u_i\|^2 \leqslant \|x\|$$

Les inégalités ci-dessus sont des égalités et d'après le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz, il s'ensuit que $x \in \operatorname{Vect}(u_i)$. On a donc

$$\operatorname{Vect}\left((u_k)_{k \in [\![1\,;\,n]\!] \smallsetminus \{i\}}\right)^{\perp} \subset \operatorname{Vect}(u_i)$$

avec égalité des dimensions d'où

$$\forall i \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad \operatorname{Vect}\left((u_k)_{k \in [\![1\,;\,n]\!] \smallsetminus \{i\}}\right)^{\perp} = \operatorname{Vect}(u_i)$$

d'où le caractère orthogonal de $(u_1, \ldots, u_n)$.

Exercice 11 (**)

Soit E euclidien et G un sous-groupe fini de GL(E).

1. Soit $f \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$. Montrer que tout sev stable par f admet un supplémentaire stable.
2. Montrer que $(x, y) \mapsto \sum_{g \in \mathrm{G}} \langle g(x), g(y) \rangle$ définit un produit scalaire sur E.
3. Soit F sev stable par tous les éléments de G. Montrer que F admet un supplémentaire stable par tous les éléments de G.

Corrigé : 1. D'après le cours, on sait

$$\boxed{\text{Pour tout sev stable par } f\text{, son orthogonal est stable par } f.}$$

2. On note $\langle x, y \rangle_{\mathrm{G}} = \sum_{g \in \mathrm{G}} \langle g(x), g(y) \rangle$ pour $(x, y) \in \mathrm{E}^2$. C'est une application symétrique, linéaire en la première variable, positive puisque

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \langle x, x \rangle_{\mathrm{G}} = \sum_{g \in \mathrm{G}} \langle g(x), g(x) \rangle \geqslant 0$$

et définie. En effet, pour $x \in \mathrm{E}$, il vient

$$\langle x, x \rangle_{\mathrm{G}} = 0 \iff \langle x, x \rangle + \sum_{g \in \mathrm{G} \smallsetminus \{\mathrm{id}\}} \underbrace{\langle g(x), g(x) \rangle}_{\leqslant 0} = 0 \implies \langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0_{\mathrm{E}}$$

Ainsi $\boxed{\text{L'application } \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{G}} \text{ est un produit scalaire sur E.}}$

3. Soit $f \in \mathrm{G}$. L'application $g \mapsto g \circ f$ réalise une permutation de G. Ainsi, pour $(x, y) \in \mathrm{E}^2$, on obtient

$$\langle f(x), f(y) \rangle_{\mathrm{G}} = \sum_{g \in \mathrm{G}} \langle g \circ f(x), g \circ f(y) \rangle = \sum_{g \in \mathrm{G}} \langle g(x), g(y) \rangle = \langle x, y \rangle_{\mathrm{G}}$$

Ainsi, dans E muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{G}}$, l'application f conserve ce produit scalaire ce qui prouve qu'il s'agit d'une isométrie. D'après le résultat de la première question, le sev $\mathrm{F}^{\perp_{\mathrm{G}}}$ est stable par f et ceci vaut pour tout $f \in \mathrm{G}$. On conclut

$$\boxed{\text{Le sev F admet un supplémentaire stable par tous les éléments de G.}}$$