ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°56

Exercice 1 (**)

Soit E euclidien et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

1. Montrer $\qquad \operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f \quad \Longrightarrow \quad f + f^* \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$
2. Montrer la réciproque si $f^2 = 0$.

Corrigé : 1. Soit $x \in \operatorname{Ker}(f + f^*)$. On a $f(x) = -f^*(x) \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} f^*$. Or, on a $\operatorname{Im} f^* = (\operatorname{Ker} f)^\perp$ et $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$ d'où $f(x) \in \operatorname{Ker} f \cap (\operatorname{Ker} f)^\perp$ ce qui prouve $f(x) = f^*(x) = 0_\mathrm{E}$ puis $x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} f^*$. Or, on a $\operatorname{Ker} f^* = (\operatorname{Im} f)^\perp$ et $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$ d'où $x \in \operatorname{Im} f \cap (\operatorname{Im} f)^\perp$ ce qui prouve $x = 0_\mathrm{E}$. Comme il s'agit d'un endomorphisme en dimension finie, on conclut

$$\boxed{\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f \quad \Longrightarrow \quad f + f^* \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})}$$

2. On suppose $f^2 = 0$ d'où $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$ et $f + f^* \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$. Puis, on a les inclusions

$$\mathrm{E} = \operatorname{Im}(f + f^*) \subset \operatorname{Im} f + \underbrace{\operatorname{Im} f^*}_{=(\operatorname{Ker} f)^\perp} \subset \operatorname{Ker} f + (\operatorname{Ker} f)^\perp = \mathrm{E}$$

d'où $\qquad \mathrm{E} \subset \operatorname{Im} f \overset{\perp}{\oplus} (\operatorname{Ker} f)^\perp \subset \operatorname{Ker} f \overset{\perp}{\oplus} (\operatorname{Ker} f)^\perp = \mathrm{E}$

Passant aux dimensions, il en résulte $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Ker} f$ et on conclut

$$\boxed{f^2 = 0 \quad \text{et} \quad f + f^* \in \mathrm{GL}(\mathrm{E}) \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f}$$

Exercice 2 (***)

Soit E euclidien et a, b vecteurs non nuls de E. Déterminer les bornes inférieures et supérieures de φ sur $\mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$ avec

$$\forall x \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\} \qquad \varphi(x) = \frac{\langle a, x\rangle \langle b, x\rangle}{\|x\|^2}$$

Corrigé : On pose $u = \dfrac{a}{\|a\|}$ et $v = \dfrac{b}{\|b\|}$. Pour $x \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$, on a

$$\varphi(x) = \frac{\|a\|\|b\|}{\|x\|^2} \langle u, x\rangle \langle v, x\rangle = \frac{\|a\|\|b\|}{4\|x\|^2} \left(\langle u + v, x\rangle^2 - \langle u - v, x\rangle^2\right)$$

Puis $\qquad \forall x \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\} \qquad -\dfrac{\|a\|\|b\|}{4\|x\|^2} \langle u - v, x\rangle^2 \leqslant \varphi(x) \leqslant \dfrac{\|a\|\|b\|}{4\|x\|^2} \langle u + v, x\rangle^2$

et avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\forall x \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\} \qquad -\frac{\|a\|\|b\|}{4}\|u - v\|^2 \leqslant \varphi(x) \leqslant \frac{\|a\|\|b\|}{4}\|u + v\|^2$$

Supposons $u+v$ et $u-v$ non nuls. En observant que $\langle u + v, u - v\rangle = 0$, on obtient en considérant $x = u + v$ et $x = u - v$ que le majorant et minorant sont atteints. Si $u - v = 0_\mathrm{E}$, on a

$$\forall x \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\} \qquad 0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \frac{\|a\|\|b\|}{\|x\|^2} \langle u, x\rangle^2$$

Le majorant est atteint pour $x = u$ et le minorant est atteint pour $x \perp u$. On procède de même si $u + v = 0_{\mathrm{E}}$. On conclut

$$\boxed{\operatorname*{Sup}_{x \in \mathrm{E} \smallsetminus \{0_{\mathrm{E}}\}} \varphi(x) = \frac{\langle a, b\rangle + \|a\|\|b\|}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname*{Inf}_{x \in \mathrm{E} \smallsetminus \{0_{\mathrm{E}}\}} \varphi(x) = \frac{\langle a, b\rangle - \|a\|\|b\|}{2}}$$

Variante : D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a pour $x \in \mathrm{E} \smallsetminus \{0_{\mathrm{E}}\}$

$$|\varphi(x)| \leqslant \|a\|\|b\|$$

ce qui justifie que φ admet une borne supérieure et inférieure finie sur $\mathrm{E} \smallsetminus \{0_{\mathrm{E}}\}$. On a

$$\forall x \in \mathrm{E} \smallsetminus \{0_{\mathrm{E}}\} \qquad \varphi(x) = \varphi\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$$

Ainsi
$$\operatorname*{Sup}_{x \in \mathrm{E} \smallsetminus \{0_{\mathrm{E}}\}} \varphi(x) = \operatorname*{Sup}_{x \in \mathrm{S}(0,1)} \varphi(x) \quad \text{et} \quad \operatorname*{Inf}_{x \in \mathrm{E} \smallsetminus \{0_{\mathrm{E}}\}} \varphi(x) = \operatorname*{Inf}_{x \in \mathrm{S}(0,1)} \varphi(x)$$

Soit P un plan vectoriel contenant a et b. On a clairement

$$\operatorname*{Sup}_{x \in \mathrm{S}(0,1)} \varphi(x) \geqslant \operatorname*{Sup}_{x \in \mathrm{P} \cap \mathrm{S}(0,1)} \varphi(x)$$

Comme $\mathrm{E} = \mathrm{P} \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{P}^{\perp}$, pour $x \in \mathrm{S}(0,1)$ qu'on décompose en $x = u + v$ avec $(u, v) \in \mathrm{P} \times \mathrm{P}^{\perp}$, on a $\|u\| \leqslant \|x\| = 1$ et

$$\varphi(x) = \langle x, a\rangle \langle x, b\rangle = \langle u, a\rangle \langle u, b\rangle \leqslant \frac{\langle u, a\rangle \langle u, b\rangle}{\|u\|^2} = \varphi\left(\frac{u}{\|u\|}\right) \leqslant \operatorname*{Sup}_{t \in \mathrm{P} \cap \mathrm{S}(0,1)} \varphi(t)$$

On en déduit
$$\operatorname*{Sup}_{x \in \mathrm{S}(0,1)} \varphi(x) = \operatorname*{Sup}_{x \in \mathrm{P} \cap \mathrm{S}(0,1)} \varphi(x)$$

et de même pour la borne inférieure. Dans le plan P euclidien orienté, pour $x \in \mathrm{P} \cap \mathrm{S}(0,1)$, on note $\theta = \widehat{(a, b)}$, $\alpha = \widehat{(a, x)}$ et $\beta = \widehat{(x, b)}$.

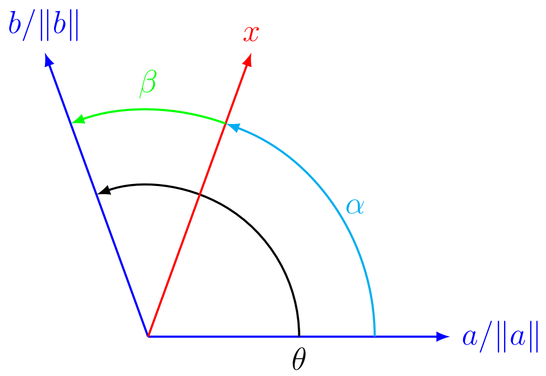

Figure 1 – Vue dans le plan P

On a pour $x \in \mathrm{S}(0,1) \cap \mathrm{P}$

$$\varphi(x) = \|a\|\|b\| \cos\alpha \cos\beta = \frac{\|a\|\|b\|}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

On a $\alpha + \beta = \theta$ et $\alpha - \beta = 2\alpha - \theta$ d'où

$$\varphi(x) = \frac{\langle a, b\rangle + \|a\|\|b\| \cos(2\alpha - \theta)}{2}$$

Le choix de α étant quelconque puisqu'on peut choisir n'importe quel $x \in \mathrm{S}(0,1) \cap \mathrm{P}$, on retrouve le résultat précédent à savoir

$$\underset{x \in \mathrm{E} \smallsetminus \{0_\mathrm{E}\}}{\mathrm{Sup}} \varphi(x) = \frac{\langle a, b\rangle + \|a\|\|b\|}{2} \quad \text{et} \quad \underset{x \in \mathrm{E} \smallsetminus \{0_\mathrm{E}\}}{\mathrm{Inf}} \varphi(x) = \frac{\langle a, b\rangle - \|a\|\|b\|}{2}$$

Exercice 3 (***)

Soit E euclidien de dimension n entier non nul. Pour une famille $u = (u_1, \ldots, u_p) \in \mathrm{E}^p$, on note $\mathrm{G}_u = \left(\langle u_i, u_j\rangle\right)_{(i,j) \in [\![1\,;\,p]\!]^2} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$. Soient $u = (u_1, \ldots, u_p) \in \mathrm{E}^p$ et $v = (v_1, \ldots, v_p) \in \mathrm{E}^p$ telles que $\mathrm{G}_u = \mathrm{G}_v$. On pourra utiliser librement les résultats déjà rencontrés sur les matrices de Gram.

1. On suppose u libre. Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ tel que $f(u_i) = v_i$ pour $i \in [\![1\,;\,p]\!]$.
2. Généraliser le résultat précédent pour u quelconque.

Corrigé : 1. On a $\mathrm{rg}\,(u) = \mathrm{rg}\,(\mathrm{G}_u) = \mathrm{rg}\,(\mathrm{G}_v) = \mathrm{rg}\,(v)$ d'où v libre (on pourrait aussi utiliser la caractérisation u libre $\iff$ $\mathrm{G}_u \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$). Si $p < n$, on note $\mathrm{U} = \mathrm{Vect}\,(u)$ et $\mathrm{V} = \mathrm{Vect}\,(v)$ et $(u_{p+1}, \ldots, u_n)$, $(v_{p+1}, \ldots, v_n)$ des bases orthonormées respectives de $\mathrm{U}^\perp$ et $\mathrm{V}^\perp$. On définit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ par $f(u_i) = v_i$ pour $i \in [\![1\,;\,n]\!]$. Soit $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i u_i$ et $y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i u_i$ des vecteurs de E. On a

$$\langle f(x), f(y)\rangle = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i y_j \langle f(u_i), f(u_j)\rangle = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i y_j \langle v_i, v_j\rangle$$

Par hypothèse, on a $\qquad \forall (i,j) \in [\![1\,;\,p]\!]^2 \qquad \langle v_i, v_j\rangle = \langle u_i, u_j\rangle$

puis par construction $\quad \forall (i,j) \in [\![p+1\,;\,n]\!]^2 \qquad \langle v_i, v_j\rangle = \delta_{i,j} = \langle u_i, u_j\rangle$

et $\qquad \forall (i,j) \in [\![1\,;\,p]\!] \times [\![p+1\,;\,n]\!] \qquad \langle v_i, v_j\rangle = 0 = \langle u_i, u_j\rangle$

Ainsi $\qquad \langle f(x), f(y)\rangle = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i y_j \langle u_i, u_j\rangle = \langle x, y\rangle$

Ainsi, l'application f conserve le produit scalaire et par conséquent

$$\boxed{\text{Si } u \text{ libre, il existe } f \in \mathcal{O}(\mathrm{E}) \text{ tel que } f(u_i) = v_i \text{ pour tout } i \in [\![1\,;\,p]\!].}$$

2. Soit $\mathrm{I} \subset [\![1\,;\,p]\!]$ tel que $\mathrm{rg}\,(u_i)_{i \in \mathrm{I}} = \mathrm{rg}\ u$. On note $u' = (u_i)_{i \in \mathrm{I}}$ et $v' = (v_i)_{i \in \mathrm{I}}$. On a $\mathrm{G}_{u'} = \mathrm{G}_{v'}$. D'après le résultat précédent, il existe $f \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ tel que $f(u_i) = v_i$ pour tout $i \in \mathrm{I}$. Montrons que l'égalité vaut aussi hors de I. Soit $j \in [\![1\,;\,p]\!] \smallsetminus \mathrm{I}$. Il existe $(\alpha_i)_{i \in \mathrm{I}}$ des réels tels que $u_j = \sum\limits_{i \in \mathrm{I}} \alpha_i u_i$. On a $f(u_j) = \sum\limits_{i \in \mathrm{I}} \alpha_i f(u_i) = \sum\limits_{i \in \mathrm{I}} \alpha_i v_i \in \mathrm{V}$. Puis, pour $k \in [\![1\,;\,p]\!]$, il vient

$$\begin{aligned}\langle f(u_j) - v_j, v_k\rangle &= \left\langle \sum_{i \in \mathrm{I}} \alpha_i f(u_i) - v_j, v_k \right\rangle = \sum_{i \in \mathrm{I}} \alpha_i \langle v_i, v_k\rangle - \langle v_j, v_k\rangle \\ &= \sum_{i \in \mathrm{I}} \alpha_i \langle u_i, u_k\rangle - \langle u_j, u_k\rangle = \left\langle \sum_{i \in \mathrm{I}} \alpha_i u_i - u_j, u_k \right\rangle = \langle 0_\mathrm{E}, u_k\rangle = 0\end{aligned}$$

Ainsi $\qquad f(u_j) - v_j \in \mathrm{V} \cap \mathrm{V}^\perp = \{0_\mathrm{E}\}$

ce qui prouve $f(u_j) = v_j$ et ce pour tout $j \in [\![1\,;\,p]\!] \smallsetminus \mathrm{I}$. On conclut

$$\boxed{\text{Il existe } f \in \mathcal{O}(\mathrm{E}) \text{ tel que } f(u_i) = v_i \text{ pour tout } i \in [\![1\,;\,p]\!].}$$

Exercice 4 (***)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $\qquad \forall \mathrm{M} \in \mathrm{E} \qquad \varphi(\mathrm{M}) = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{i,j}$

Justifier que φ atteint ses bornes sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ et les préciser.

Corrigé : L'application φ est linéaire sur E de dimension finie donc φ est continue. L'ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un compact de E et $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est un fermé relatif de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ donc un compact de E.

Ainsi $\qquad \boxed{\text{L'application } \varphi \text{ atteint ses bornes sur } \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \mathcal{SO}_n(\mathbb{R}).}$

Considérons $\mathrm{F} = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle \mathrm{X}, \mathrm{Y} \rangle = \mathrm{X}^\top \mathrm{Y}$ pour $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in \mathrm{F}^2$. Notant U la colonne de F constituée de 1, on a

$$\forall \mathrm{M} \in \mathrm{E} \qquad \varphi(\mathrm{M}) = \langle \mathrm{MU}, \mathrm{U} \rangle$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, en observant que $\|\mathrm{MU}\| = \|\mathrm{U}\|$ pour $\mathrm{M} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, il vient

$$\forall \mathrm{M} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \qquad \varphi(-\mathrm{I}_n) = -n \leqslant \varphi(\mathrm{M}) \leqslant n = \varphi(\mathrm{I}_n)$$

Seule la borne inférieure sur $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ mérite un effort supplémentaire. Soit $\mathrm{V} \in \operatorname{Vect}(\mathrm{U})^\perp$ puis M matrice de la symétrie orthogonale par rapport à $\operatorname{Vect}(\mathrm{U}, \mathrm{V})^\perp$. Ainsi, la matrice M est orthogonalement semblable à $\operatorname{diag}(-1, -1, 1, \ldots, 1)$ donc dans $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi(\mathrm{M}) = \langle \mathrm{MU}, \mathrm{U} \rangle = \langle -\mathrm{U}, \mathrm{U} \rangle = -n$. On conclut

$$\boxed{\operatorname*{Inf}_{\mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \varphi = \operatorname*{Inf}_{\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})} \varphi = -n \quad \text{et} \quad \operatorname*{Sup}_{\mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \varphi = \operatorname*{Sup}_{\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})} \varphi = n}$$

Variante : On peut aussi interpréter pour $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$ la quantité $\varphi(\mathrm{M})$ par

$$\varphi(\mathrm{M}) = \operatorname{Tr}(\mathrm{MJ})$$

avec $\mathrm{J} \in \mathrm{E}$ constituée de 1 puis réduire orthogonalement J.

Exercice 5 (***)

Soient E euclidien et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ vérifiant

$$f(0_\mathrm{E}) = 0_\mathrm{E} \quad \text{et} \quad \forall (x, y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$$

Montrer que $f \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$.

Corrigé : On a clairement $\|f(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. Puis

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

d'où l'identité de polarisation

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle x, y \rangle = \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2\right)$$

Ainsi, pour $(x, y) \in \mathrm{E}^2$

$$\begin{aligned} \langle f(x), f(y) \rangle &= \frac{1}{2}\left(\|f(x)\|^2 + \|f(y)\|^2 - \|f(x - y)\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2\right) = \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

Puis, soit $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base orthonormée de E. Par conservation du produit scalaire, la famille $(f(e_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base orthonormée de E. Ainsi, on a

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad f(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle f(x), f(e_i)\rangle\, f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle\, f(e_i)$$

Cette dernière écriture prouve que f est une application linéaire. On conclut

$$\boxed{f \in \mathcal{O}(\mathrm{E})}$$

Remarque : Le résultat peut être généralisé pour $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ avec E et F préhilbertiens et f vérifiant les mêmes contraintes. On montre que f est linéaire en établissant l'égalité

$$\forall (x, y, \lambda) \in \mathrm{E}^2 \times \mathbb{R} \qquad \|f(x + \lambda y) - f(x) - \lambda f(y)\|^2 = 0$$

Il s'agit d'un cas particulier du *théorème de Mazur-Ulam.*

Exercice 6 (***)

Soit E euclidien et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ conservant l'orthogonalité, *i.e.*

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle x, y\rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle f(x), f(y)\rangle = 0$$

1. Pour u et v dans E unitaires, calculer $\langle u + v, u - v\rangle$.
2. Montrer qu'il existe $\alpha \geqslant 0$ tel que
$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \|f(x)\| = \alpha \|x\|$$
3. Conclure qu'il existe $g \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ tel que $f = \alpha g$.

Corrigé : 1. Soient u, v vecteurs unitaires de E. On a

$$\boxed{\langle u + v, u - v\rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2 = 0}$$

2. Soit v vecteur unitaire de E. Pour $x \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$, posant $u = \dfrac{x}{\|x\|}$, on a d'après le résultat de la question précédente

$$\langle u + v, u - v\rangle = 0$$

Par hypothèse sur f, il s'ensuit $\qquad \langle f(u + v), f(u - v)\rangle = 0$

et on a $\qquad \langle f(u + v), f(u - v)\rangle = \langle f(u) + f(v), f(u) - f(v)\rangle = \|f(u)\|^2 - \|f(v)\|^2$

d'où $\qquad \forall x \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\} \qquad \left\|f\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \|f(v)\|$

Ainsi $\qquad \forall x \in \mathrm{E} \qquad \|f(x)\| = \|f(v)\|\|x\|$

l'égalité étant trivialement vérifiée pour $x = 0_\mathrm{E}$. Notant $\alpha = \|f(v)\|$, on conclut

$$\boxed{\text{Il existe } \alpha \geqslant 0 \text{ tel que } \|f(x)\| = \alpha\|x\| \text{ pour tout } x \in \mathrm{E}.}$$

Remarque : On peut aussi considérer $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base orthonormée de E, établir que $\|f(e_i)\|$ ne dépend pas du choix de $i \in [\![1 \,;\, n]\!]$ et étendre à tout $x \in \mathrm{E}$.

3. Si $\alpha = 0$, alors $f = 0$ et on peut choisir $g = \mathrm{id}$ par exemple. Sinon, si $\alpha > 0$, on pose $g = \dfrac{1}{\alpha} f$. D'après le résultat de la question précédente, l'application g est une isométrie. On conclut

$$\boxed{\text{Il existe } g \in \mathcal{O}(\mathrm{E}) \text{ tel que } f = \alpha g.}$$

Remarque : L'application f est appelée *similitude.*

Exercice 7 (***)

1. Soit $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer $\qquad \mathrm{I}_n + A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

   puis $\qquad B = (\mathrm{I}_n - A)(\mathrm{I}_n + A)^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad -1 \notin \mathrm{Sp}\,(B)$

2. On définit φ sur $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ par

$$\forall A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \qquad \varphi(A) = (\mathrm{I}_n - A)(\mathrm{I}_n + A)^{-1}$$

   Montrer que φ réalise une bijection de $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sur $\{B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \mid -1 \notin \mathrm{Sp}\,(B)\}$.

Corrigé : 1. Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $(\mathrm{I}_n + A)X = 0$. Il vient

$$0 = \langle (\mathrm{I}_n + A)X, X\rangle = \|X\|^2 + \langle AX, X\rangle = \|X\|^2 \quad \Longrightarrow \quad X = 0$$

Ainsi $$\boxed{\mathrm{I}_n + A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}$$

Puis $$B^\top B = (\mathrm{I}_n - A)^{-1} \underbrace{(\mathrm{I}_n + A)(\mathrm{I}_n - A)}_{=(\mathrm{I}_n - A)(\mathrm{I}_n + A)} (\mathrm{I}_n + A)^{-1} = \mathrm{I}_n$$

On observe $$(B + \mathrm{I}_n)(\mathrm{I}_n + A) = \mathrm{I}_n - A + \mathrm{I}_n + A = 2\mathrm{I}_n$$

ce qui prouve l'inversibilité de $B + \mathrm{I}_n$ et par conséquent

$$\boxed{B = (\mathrm{I}_n - A)(\mathrm{I}_n + A)^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad -1 \notin \mathrm{Sp}\,(B)}$$

2. L'application φ est à valeurs dans $\{B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \mid -1 \notin \mathrm{Sp}\,(B)\}$. Soit $B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ avec $-1 \notin \mathrm{Sp}\,(B)$. En reprenant la relation $(B + \mathrm{I}_n)(\mathrm{I}_n + A) = 2\mathrm{I}_n$, il vient

$$\varphi(A) = B \iff (B + \mathrm{I}_n)A = 2\mathrm{I}_n - \mathrm{I}_n - B = \mathrm{I}_n - B \iff A = (\mathrm{I}_n + B)^{-1}(\mathrm{I}_n - B)$$

et $$A^\top = (\mathrm{I}_n - B^\top)(\mathrm{I}_n + B^\top)^{-1} = (B - \mathrm{I}_n)(B + \mathrm{I}_n)^{-1}$$

en multipliant par B dans chaque facteur où apparaissent les $B^\top$ (multiplications qui se compensent). Enfin, les matrices $(\mathrm{I}_n + B)^{-1}$ et $\mathrm{I}_n - B = 2\mathrm{I}_n - (\mathrm{I}_n + B)$ commutent (on peut aussi utiliser la commutation de $\mathrm{I}_n + B$ et $\mathrm{I}_n - B$) et on en déduit $A^\top = -A$. On a donc prouvé l'existence dans $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ d'un unique antécédent à l'équation $\varphi(A) = B$ et par conséquent

$$\boxed{\text{L'application } \varphi \text{ réalise une bijection de } \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \text{ sur } \{B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \mid -1 \notin \mathrm{Sp}\,(B)\}.}$$

Remarque : L'application φ est appelée *transformation de Cayley*.

Variante : Pour $B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ avec $-1 \notin \mathrm{Sp}\,(B)$, on a

$$\varphi(A) = B \iff (B + \mathrm{I}_n)(\mathrm{I}_n + A) = 2\mathrm{I}_n \iff A = -\mathrm{I}_n + 2(B + \mathrm{I}_n)^{-1}$$

d'où

$$A^\top = -\mathrm{I}_n + 2(\mathrm{I}_n + B^{-1})^{-1} = -\mathrm{I}_n + 2(\mathrm{I}_n + B)^{-1}B = -\mathrm{I}_n + 2(\mathrm{I}_n + B)^{-1}(B + \mathrm{I}_n - \mathrm{I}_n) = -A$$

et on conclut comme précédemment.

Exercice 8 (***)

Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ avec n entier non nul et vérifiant $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}^\top$.

1. Montrer que $\mathrm{A}^3 = \mathrm{I}_n$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\dim \mathrm{Ker}\,(\mathrm{A}^2 + \mathrm{A} + \mathrm{I}_n)$ est paire.
3. Réduire orthogonalement A.

Corrigé : 1. En transposant la relation en A, on obtient $\left(\mathrm{A}^\top\right)^2 = \mathrm{A}$ que l'on injecte dans la relation initiale pour obtenir $\mathrm{A}^4 = \mathrm{A}$. Comme la matrice A est inversible, on obtient $\mathrm{A}^3 = \mathrm{I}_n$ et multipliant $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}^\top$ à droite par A, on conclut

$$\boxed{\mathrm{A}^3 = \mathrm{I}_n \quad \text{et} \quad \mathrm{A} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})}$$

2. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associé à A. Comme $u^2 + u + \mathrm{id}$ et u commutent, on a $\mathrm{Ker}\,(u^2 + u + \mathrm{id})$ stable par u ce qui permet de considérer v l'induit par u sur ce noyau. On a donc $v^2 + v + \mathrm{id} = 0$ et $\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1 = (\mathrm{X} - j)(\mathrm{X} - \bar{j})$ d'où $\mathrm{Sp}\,(v)$ vide ce qui prouve que χ_v n'a pas de racine réelle et comme $\deg \chi_v = \dim \mathrm{Ker}\,(u^2 + u + \mathrm{id})$, on conclut

$$\boxed{\dim \mathrm{Ker}\,(\mathrm{A}^2 + \mathrm{A} + \mathrm{I}_n) \text{ est paire.}}$$

3. Le polynôme $\mathrm{X}^3 - 1 = (\mathrm{X} - 1)(\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1)$ est annulateur de A et $(\mathrm{X} - 1) \wedge (\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1) = 1$. D'après le lemme des noyaux, on a

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{A} - \mathrm{I}_n) \oplus \mathrm{Ker}\,(\mathrm{A}^2 + \mathrm{A} + \mathrm{I}_n)$$

Si $\dim \mathrm{Ker}\,(\mathrm{A}^2 + \mathrm{A} + \mathrm{I}_n) = 0$, on trouve $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{A} - \mathrm{I}_n)$ d'où $\mathrm{A} = \mathrm{I}_n$.

Supposons $\dim \mathrm{Ker}\,(\mathrm{A}^2 + \mathrm{A} + \mathrm{I}_n) = 2q \geqslant 2$. Soit $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{A} - \mathrm{I}_n) \times \mathrm{Ker}\,(\mathrm{A}^2 + \mathrm{A} + \mathrm{I}_n)$. Il vient en utilisant $\mathrm{A}^\top = \mathrm{A}^2$ et la conservation du produit scalaire par A

$$\langle \mathrm{X}, \mathrm{Y} \rangle = -\langle \mathrm{X}, \mathrm{A}^2\mathrm{Y} \rangle - \langle \mathrm{X}, \mathrm{AY} \rangle = -\langle \mathrm{AX}, \mathrm{Y} \rangle - \langle \mathrm{AX}, \mathrm{AY} \rangle = -2\,\langle \mathrm{X}, \mathrm{Y} \rangle$$

Ainsi
$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{A} - \mathrm{I}_n) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}\,(\mathrm{A}^2 + \mathrm{A} + \mathrm{I}_n)$$

L'endomorphisme v induit par u sur $\mathrm{Ker}\,(u^2 + u + \mathrm{id})$ est une isométrie. Alors, il existe une base orthonormée de $\mathrm{Ker}\,(u^2 + u + \mathrm{id})$ dans laquelle la matrice B de v est formée de blocs diagonaux (1), (-1) ou $\mathrm{R}(\theta)$ avec θ réel. Comme B n'admet pas de valeurs propres réelles, les blocs sont nécessairement des matrices de rotations $\mathrm{R}(\theta_1), \ldots, \mathrm{R}(\theta_q)$ avec les θ_i réels. On a

$$\chi_\mathrm{B} = \prod_{i=1}^{q} \chi_{\mathrm{R}(\theta_i)}$$

et
$$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad \chi_{\mathrm{R}(\theta)} = \begin{vmatrix} \mathrm{X} - \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \mathrm{X} - \cos\theta \end{vmatrix} = \mathrm{X}^2 - 2\cos\theta \mathrm{X} + 1$$

Par ailleurs, les seules racines complexes possibles de χ_B sont j et $\bar{j}$ et comme c'est un polynôme de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, il s'ensuit que

$$\chi_\mathrm{B} = (\mathrm{X} - j)^q(\mathrm{X} - \bar{j})^q = (\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1)^q = \left(\chi_{\mathrm{R}(\pm 2\pi/3)}\right)^q$$

Par unicité de la décomposition en facteurs irréductibles unitaires dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, on a en déduit que $\theta_i \equiv \pm 2\pi/3\ [2\pi]$ pour tout $i \in [\![1\,;\, q]\!]$. Ainsi, quitte à éventuellement réordonner la base de $\mathrm{Ker}\,(u^2 + u + \mathrm{id})$ pour avoir des angles positifs, on conclut

$$\boxed{\exists \mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \quad | \quad \mathrm{P}^\top\mathrm{AP} = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \mathrm{R}(2\pi/3), \ldots, \mathrm{R}(2\pi/3))}$$