

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – A – (XLCR)

(Durée: 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Dans tout le problème

- E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$,
- Id est l'application identité sur E : $\text{Id}(x) = x$ pour tout $x \in E$,
- $L(E)$ est l'algèbre des endomorphismes de E ,
- $\text{GL}(E)$ est le groupe des automorphismes de E ,
- $E^* = L(E, \mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des formes linéaires sur E ,
- $A(E)$ est l'espace vectoriel des applications $\omega : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont bilinéaires et anti-symétriques, c'est-à-dire qui vérifient, quel que soit $(x, y, z) \in E^3$ et quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\omega(\lambda x + y, z) &= \lambda \omega(x, z) + \omega(y, z), & \omega(x, \lambda y + z) &= \lambda \omega(x, y) + \omega(x, z), \\ \omega(x, y) &= -\omega(y, x).\end{aligned}$$

Pour tout $\omega \in A(E)$ et $x \in E$, on note $\omega(x, \cdot)$ la forme linéaire définie par

$$\left| \begin{array}{ll} \omega(x, \cdot) : & E \rightarrow \mathbb{R} \\ & y \mapsto \omega(x, y) \end{array} \right.$$

Pour tout $\omega \in A(E)$, on note φ_ω l'application linéaire définie par

$$\left| \begin{array}{ll} \varphi_\omega : & E \rightarrow E^* \\ & x \mapsto \omega(x, \cdot) \end{array} \right.$$

Un élément ω de $A(E)$ est appelé **forme symplectique sur E** si φ_ω est un isomorphisme de E sur E^* .

Un élément J de $L(E)$ est appelé **structure complexe sur E** s'il vérifie $J^2 = -\text{Id}$.

On dit qu'une forme symplectique ω sur E **dompte** une structure complexe J si $\omega(x, J(x)) > 0$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$.

On note

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients réels,
- $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de taille n à coefficients réels,
- I_n la matrice unité de taille n ,
- lorsque n est pair, J_n la matrice carrée de taille n définie par blocs

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & -I_{\frac{n}{2}} \\ I_{\frac{n}{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

- $\det$ l'application déterminant sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
- tM la transposée de la matrice M .

On identifie tout élément de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ à un nombre réel.

La partie I est utilisée dans les parties III et IV. Les parties II et III indépendantes entre elles, sont utilisées dans la partie IV.

Partie I: Bases symplectiques

1. Montrer que la dimension de l'espace vectoriel E^* vaut n .
2. Montrer que $\omega(x, x) = 0$ pour tout $\omega \in A(E)$ et pour tout $x \in E$.
3. Soit $\omega \in A(E)$ et $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base de E .
 - (a) Montrer qu'il existe une unique matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont on précisera les coefficients, telle que pour tout $(x, y) \in E^2$, $\omega(x, y) = {}^tXMY$ où $X, Y \in \mathbb{R}^n$ sont les matrices colonnes représentant respectivement x et y dans la base $\mathcal{B}$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} x &= x_1b_1 + \dots + x_nb_n, \\ y &= y_1b_1 + \dots + y_nb_n. \end{aligned}$$

On notera alors $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega)$.

- (b) Montrer que M est antisymétrique, c'est-à-dire que ${}^tM = -M$.
 - (c) Montrer que l'espace vectoriel $A(E)$ est de dimension 1 lorsque E est de dimension 2.
 - (d) Montrer l'équivalence entre les trois énoncés suivants.
 - ($\mathcal{E}_1$): ω est une forme symplectique sur E .
 - ($\mathcal{E}_2$): Pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, il existe $y \in E$ tel que $\omega(x, y) \neq 0$.
 - ($\mathcal{E}_3$): $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega)$ est inversible.
4. Montrer que, s'il existe une forme symplectique sur E , alors E est de dimension paire.

Dorénavant, jusqu'à la fin du problème, n est un entier pair ≥ 2 .

5. Montrer que l'application ω_0 définie par

$$\begin{aligned} \omega_0 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\mapsto {}^tXJ_nY \end{aligned}$$

est une forme symplectique sur $\mathbb{R}^n$.

Jusqu'à la fin de cette partie, on fixe une forme symplectique ω sur E .

Le but des questions 6 à 9 est de montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega) = J_n$.

6. Traiter le cas où E est de dimension 2.
7. Soit F un sous-espace vectoriel de E .

- (a) Montrer que, pour toute forme linéaire $u : F \rightarrow \mathbb{R}$, il existe une forme linéaire $\tilde{u} : E \rightarrow \mathbb{R}$ dont la restriction à F coïncide avec u .

On note F^ω le sous-espace vectoriel de E défini par

$$F^\omega = \{x \in E : \forall y \in F, \omega(x, y) = 0\}$$

et ψ_F l'application linéaire définie par

$$\left| \begin{array}{ll} \psi_F : E & \rightarrow F^* \\ x & \mapsto \varphi_\omega(x)|_F \end{array} \right.$$

où $\varphi_\omega(x)|_F$ est la restriction de $\varphi_\omega(x)$ à F .

- (b) Montrer que la restriction de ω à $F \times F$ est une forme symplectique sur F si et seulement si $F \cap F^\omega = \{0\}$.
- (c) Quels sont le noyau et l'image de ψ_F ?
- (d) Montrer que $\dim(F) + \dim(F^\omega) = \dim(E)$.
- (e) Montrer que, si la restriction de ω à $F \times F$ est une forme symplectique sur F , alors $E = F \oplus F^\omega$ et la restriction de ω à $F^\omega \times F^\omega$ est une forme symplectique sur F^ω .
8. Montrer par récurrence qu'il existe une base $\tilde{\mathcal{B}}$ de E telle que

$$\text{Mat}_{\tilde{\mathcal{B}}}(\omega) = \begin{pmatrix} J_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_2 \end{pmatrix}$$

9. Conclure. En déduire que ω dompte au moins une structure complexe sur E .

Partie II: Deux outils sur les polynômes

On note $\mathbb{R}_d[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq d$ à coefficients réels, pour tout $d \in \mathbb{N}$.

10. Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ des polynômes non nuls de degrés respectifs p et q strictement positifs. Montrer que l'application linéaire $L_{P,Q}$ définie par

$$\left| \begin{array}{ll} L_{P,Q} : \mathbb{R}_{q-1}[X] \times \mathbb{R}_{p-1}[X] & \rightarrow \mathbb{R}_{p+q-1}[X] \\ (V, W) & \mapsto VP + WQ \end{array} \right.$$

est un isomorphisme si et seulement si P et Q sont premiers entre eux dans $\mathbb{R}[X]$.

11. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Construire une application

$$\left| \begin{array}{ll} r : \mathbb{R}_d[X] & \rightarrow \mathbb{R} \\ P & \mapsto r(P) \end{array} \right.$$

polynomiale en les coefficients de P , telle que, si $r(P)$ est non nul, alors les racines de P dans $\mathbb{C}$ sont simples.

Indication: On pourra utiliser la question précédente.

12. Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}^d$. On suppose que la fonction f est non nulle. Montrer que $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ est dense dans $\mathbb{R}^d$.

Indication: On pourra utiliser le fait qu'un polynôme non nul à une variable n'a qu'un nombre fini de racines.

Dans les parties III et IV, on fixe deux formes symplectiques ω et ω_1 sur E .

Partie III: Réduction simultanée

13. Montrer qu'il existe un unique $u \in \text{GL}(E)$ tel que $\omega_1(x, y) = \omega(u(x), y)$ pour tout $(x, y) \in E^2$. Montrer alors que u appartient à l'ensemble $\mathcal{S}$ défini par

$$\mathcal{S} = \{ u \in \text{GL}(E) : \forall (x, y) \in E^2, \omega(x, u(y)) = \omega(u(x), y) \} .$$

Dans les questions 14 à 19, on suppose que E est de dimension 4.

14. Soit $\mathcal{B}$ une base de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega) = J_4$. Soit $U \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

- (a) Quelle relation y a-t-il entre les matrices J_4 et U ?
 (b) Montrer qu'il existe $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$U = \begin{pmatrix} N & \alpha J_2 \\ \beta J_2 & {}^t N \end{pmatrix} .$$

- (c) Déterminer, en fonction de N , α et β les coefficients du polynôme T défini par $T(X) = \det(N - XI_2) + \alpha\beta$. Montrer que T est un polynôme annulateur de U .

Dans les questions 15 à 19, on suppose que u n'admet aucune valeur propre réelle.

Le but des questions 15 à 19 est de montrer qu'il existe une base $\tilde{\mathcal{B}}$ de E , $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ tels que

$$\text{Mat}_{\tilde{\mathcal{B}}}(\omega) = J_4 \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\tilde{\mathcal{B}}}(\omega_1) = r \begin{pmatrix} 0 & -R_{-\theta} \\ R_{\theta} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{où } R_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} .$$

15. Montrer que U est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et des vecteurs Z et Y de $\mathbb{C}^4$ linéairement indépendants sur $\mathbb{C}$ tels que $UZ = \lambda Z$ et $UY = \lambda Y$.
16. Soient Z_1, Z_2, Y_1, Y_2 des vecteurs de $\mathbb{R}^4$ tels que $Z = Z_1 + iZ_2$ et $Y = Y_1 + iY_2$. Soient $(z_1, z_2, y_1, y_2) \in E^4$ de coordonnées respectives Z_1, Z_2, Y_1, Y_2 dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que $\tilde{\mathcal{B}} := (z_1, z_2, y_1, -y_2)$ est une base de E .
17. Montrer que

$$\begin{aligned} \omega(z_1, z_2) &= \omega(y_1, y_2) = 0, \\ \omega(z_1, y_1) &= -\omega(z_2, y_2), \\ \omega(z_1, y_2) &= \omega(z_2, y_1). \end{aligned}$$

18. Montrer que, quitte à remplacer Y par ξY avec $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ bien choisi, on a $\omega(z_1, y_1) = -1$ et $\omega(z_1, y_2) = 0$.
19. Montrer qu'il existe $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ tels que

$$\text{Mat}_{\tilde{B}}(u) = r \begin{pmatrix} R_\theta & 0 \\ 0 & R_{-\theta} \end{pmatrix}$$

et conclure.

Jusqu'à la fin de cette partie, on ne fait plus d'hypothèse sur la dimension de E ni sur l'endomorphisme u . On considère un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ annulateur de u et une décomposition $P = P_1 \cdots P_r$, où $r \in \mathbb{N}^*$ et $P_1, \dots, P_r$ sont des polynômes premiers entre eux deux à deux dans $\mathbb{R}[X]$. On note $F_j = \ker[P_j(u)]$ pour $j = 1, \dots, r$.

20. Montrer que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$ et que F_j est stable par u pour $j = 1, \dots, r$.
21. Montrer que, pour tous j et k appartenant à $\{1, \dots, r\}$ et distincts, on a $F_k \subset F_j^\omega$ et $F_k \subset F_j^{\omega_1}$ (la notation F^ω est définie en question 7).

On dit alors que $F_1, \dots, F_r$ sont deux à deux orthogonaux pour ω et pour ω_1 .

22. En déduire que, pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$, les restrictions de ω et ω_1 à $F_j \times F_j$ sont des formes symplectiques sur F_j .
23. On suppose que le polynôme caractéristique de u est à racines au plus doubles dans $\mathbb{C}$. Montrer que E est la somme directe de sous-espaces de dimension 2 ou 4, deux à deux orthogonaux pour ω et ω_1 , et sur lesquels les restrictions de ω et ω_1 sont des formes symplectiques.

Partie IV: Structures complexes domptées simultanément

Dans cette partie, nous allons étudier les liens entre les propositions

- $(\mathcal{F}_1)$: **Il existe une structure complexe domptée par ω et par ω_1 .**
 $(\mathcal{F}_2)$: **Le segment $[\omega, \omega_1] = \{(1 - \theta)\omega + \theta\omega_1; \theta \in [0, 1]\}$ est inclus dans l'ensemble des formes symplectiques sur E .**

24. Soit u l'automorphisme de E défini en question 13. On suppose que $(\mathcal{F}_2)$ est satisfaite et que le polynôme caractéristique de u est à racines au plus doubles dans $\mathbb{C}$. Montrer que $(\mathcal{F}_1)$ est satisfaite.

Indication: On pourra démontrer puis utiliser le fait que, pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, il existe $\phi \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $X \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, ${}^t X R_\phi X > 0$ et ${}^t X R_{\theta+\phi} X > 0$.

25. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble défini en question 13. Montrer que l'ensemble des éléments de $\mathcal{S}$, dont le polynôme caractéristique P est à racines au plus doubles dans $\mathbb{C}$, est dense dans $\mathcal{S}$.

Indication: On pourra utiliser $r(P')$ où l'application r est définie en question 11.

26. Que peut-on conclure?