X-ENS MP 2017 Epreuve A

Thème :

Partie I : Bases symplectiques

1. Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et, pour $k \in [\![1, n]\!]$, e_k^* la forme linéaire caractérisée par les relations $e_k^*(e_j) = 0$ si $j \neq k$, et $e_k^*(e_k) = 1$. On a, pour tout $u \in E^*$ et $x = \sum_i x_i e_i$ dans E, $e_k^*(x) = x_k$ donc $u(x) = \sum_k u(e_k) e_k^*(x)$ et
$$u = \sum_k u(e_k) e_k^*$$
Ainsi $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une famille génératrice de E^*. C'est aussi une famille libre car si
$$\sum_i u_i e_i^* = 0$$
alors $u_k = \left(\sum_i u_i e_i^*\right)(e_k) = 0$. Par conséquent $\dim E^* = n$.
2. Par antisymétrie, $\omega(x, x) = -\omega(x, x)$, d'où $\omega(x, x) = 0$.
3. (a) Notons B_k le vecteur colonne ${}^t(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (où le 1 est à la k-ième place). Si une telle matrice M existe, alors
$$\omega(b_i, b_j) = {}^t B_i M B_j = M_{i,j}$$
Réciproquement, si l'on définit M comme étant la matrice $(\omega(b_i, b_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, alors pour tous $x, y \in E$:
$$\omega(x, y) = \sum_{i,j} x_i y_j \omega(b_i, b_j) = \sum_{i,j} x_i M_{i,j} y_j = {}^t XMY$$
   (b) On a
$$M_{i,j} = \omega(b_i, b_j) = -\omega(b_j, b_i) = -M_{j,i}$$
Donc ${}^t M = -M$.
   (c) Notons $A_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices antisymétriques de $M_n(\mathbb{R})$. L'application
$$\begin{array}{ccc} A(E) & \to & A_n(\mathbb{R}) \\ \omega & \mapsto & (\omega(b_i, b_j))_{i,j} \end{array}$$
est clairement linéaire. C'est donc d'après **(a)** un isomorphisme et l'on a
$$\dim A(E) = \dim A_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}.$$
En particulier, si $n = 2$, $\dim A(E) = 1$.
   (d) Posons $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega)$.
   — $(\mathcal{E}_1) \implies (\mathcal{E}_2)$: Supposons $(\mathcal{E}_1)$. Soit ω une forme symplectique sur E et $x \in E \setminus \{0\}$. Puisque ϕ_ω est un isomorphisme, $\phi_\omega(x) \neq 0$, donc il existe $y \in E$ tel que $\omega(x, y) \neq 0$.
   — $(\mathcal{E}_2) \implies (\mathcal{E}_3)$: Supposons $(\mathcal{E}_2)$. Soit X tel que $MX = 0$. Alors, pour tout Y, ${}^t XMY = -{}^t(MX)Y = 0$ d'où, par $(\mathcal{E}_2)$, $X = 0$. Ceci montre que M est inversible.

— $(\mathcal{E}_3) \implies (\mathcal{E}_1)$: Supposons $(\mathcal{E}_3)$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(\phi_\omega)$ et X le vecteur colonne de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. Si $\phi_\omega(x) = 0$ alors, pour tout $y \in E$, $\omega(x, y) = 0$. Donc pour tout vecteur colonne Y, ${}^tXMY = 0$. On en déduit ${}^tMX = 0$ puis, M étant inversible, $X = 0$ et $x = 0$. Ainsi ϕ_ω est injective. Comme $\dim E = \dim E^*$, c'est un isomorphisme et ω est une forme symplectique.

4. S'il existe une forme symplectique non nulle sur E, alors il existe d'après les questions précédentes une matrice antisymétrique inversible M dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $\det(M) = \det({}^tM) = \det(-M) = (-1)^n \det(M)$ et $\det(M) \neq 0$, n est pair.

5. Il est clair que ω_0 est une forme bilinéaire. Elle est antisymétrique car J_n est antisymétrique : $\omega_0(Y, X) = {}^tYJ_nX = {}^t({}^tYJ_nX) = {}^tX{}^tJ_nY = -{}^tXJ_nY = -\omega_0(X, Y)$. La matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est ω_0 n'est autre que J_n, qui est manifestement inversible. Donc ω_0 est une forme symplectique.

6. Soit $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ une base quelconque de E. La matrice de ω dans $\mathcal{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, où $a \neq 0$. Dans la base $(\frac{1}{a}b_1, b_2)$, la matrice de ω est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = J_2$.

7. (a) Soit G un supplémentaire de F, et $u \in F^*$. On sait qu'il existe une unique application linéaire $\tilde{u} : E \to \mathbb{R}$ qui coïncide avec u sur F et l'application nulle sur G : cette application convient.

   (b) La restriction de ω à $F \times F$ est bien sûr une forme bilinéaire alternée. C'est une forme symplectique si $\{x \in F;\ \forall y \in F,\ \omega(x, y) = 0\}$ est restreint à $\{0\}$, c'est-à-dire $F \cap F^\omega = \{0\}$.

   (c) On a bien sûr $\mathrm{Ker}(\psi_F) = F^\omega$. En outre, d'après **(a)** et parce que ϕ_ω est bijective, $\mathrm{Im}(\psi_F) = F^*$.

   (d) Il suffit d'appliquer le théorème du rang à ψ_F.

   (e) Si la restriction de ω à $F \times F$ est une forme symplectique, alors F et F^ω sont en somme directe d'après **(b)**. Ce sont donc des supplémentaires d'après **(c)**. Choisissons une base $\mathcal{B}$ de F et une base $\mathcal{B}'$ de F^ω. Soient M et M' les matrices de $\omega_{|F \times F}$ et $\omega_{|F^\omega \times F^\omega}$. Comme $\omega(x, y) = 0$ dès que $(x, y) \in F \times F^\omega$, la matrice de ω dans la base $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ est la matrice diagonale par blocs $\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M' \end{pmatrix}$. Comme elle est inversible, M' l'est aussi et $\omega_{|F^\omega \times F^\omega}$ est une forme symplectique.

8. On procède par récurrence (de 2 en 2 bien sûr) sur la dimension de E.

   • Si E est de dimension 2, la justification a été donnée en **6.**.

   • Soit $n \geqslant 4$ un entier pair, E de dimension n, et ω une forme symplectique sur E. Soit $a \in E \setminus \{0\}$ puis $b \in E$ tel que $\omega(a, b) \neq 0$. Posons $F = \mathrm{Vect}(a, b)$. D'après **3.(c)**, toutes les formes bilinéaires alternées non nulles sur F sont des formes symplectiques. Donc $\omega_{|F \times F}$ est une forme symplectique. D'après **7.(e)**, $F \oplus F^\omega = E$ et $\omega_{|F^\omega \times F^\omega}$ est une forme symplectique. En utilisant **6.** et l'hypothèse de récurrence, il existe une base $\mathcal{B}$ de F et une base $\mathcal{B}'$ de F^ω dans lesquelles les matrices de $\omega_{|F \times F}$ et $\omega_{|F^\omega \times F^\omega}$ sont respectivement J_2 et $\mathrm{Diag}(J_2, J_2, \ldots, J_2)$ (où le bloc J_2 est répété $n - 1$ fois). Dans la base $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ de E, la matrice de ω est $\mathrm{Diag}(J_2, J_2, \ldots, J_2)$ (où le bloc J_2 est répété n fois).

9. Soit $(b_1, \ldots, b_n)$ une base dans laquelle la matrice de ω est $\mathrm{Diag}(J_2, J_2, \ldots, J_2)$. Dans la base $(e_1, e_3, \ldots, e_{n-1}, e_2, e_4, \ldots, e_n)$, la matrice de ω est J_n : il existe bien une base dans laquelle la matrice de ω est J_n.

   Considérons alors la structure complexe J dont la matrice dans la base ci-dessus est $-J_n$ (on a bien $J^2 = J_n^2 = -I_n$). Pour tout $x \neq 0$ de vecteur colonne coordonnées X, on a

$$\omega(x, J(x)) = {}^tXJ_n(-J_n)X = {}^tXX > 0$$

   C'est dire que ω dompte la structure complexe J.

Partie II : Deux outils sur les polynômes

10. La linéarité de $L_{P,Q}$ est immédiate. Supposons P et Q premiers entre eux. Alors $(V, W) \in \text{Ker}(L_{P,Q})$ vérifie $VP + WQ = 0$, donc $P|WQ$ et, puisque P et Q sont premiers entre eux, $P|W$ d'où, puisque $\deg(W) < p = \deg(P)$, $W = 0$ puis $V = 0$. Ainsi, $L_{P,Q}$ est injective. Puisque les espaces de départ et d'arrivée sont de même dimension finie (à savoir $p + q$), $L_{P,Q}$ est un isomorphisme. Supposons réciproquement que $L_{P,Q}$ soit un isomorphisme. Alors il existe (V, W) tel que $VP + WQ = 1$, ce qui montre que P et Q sont premiers entre eux.
11. L'application nulle convient ! On va plutôt construire r telle que $r(P)$ est non nul si et seulement si les racines de P dans $\mathbb{C}$ sont simples. On sait que les racines complexes de $P \in \mathbb{R}_d[X]$ sont simples si et seulement si P et P' sont premiers entre eux, donc si et seulement si l'application $L_{P,P'}$ est un isomorphisme. La matrice de cette application dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_{d-1}[X] \times \mathbb{R}_{d-2}[X]$ et $\mathbb{R}_{2d-2}[X]$ est une matrice dont les coefficients sont des polynômes (de degré au plus 1) en les coefficients de P et dont le déterminant $r(P)$ est aussi une application polynomiale en les coefficients de P. Cette application r convient.
12. Il revient au même de montrer que $f^{-1}(\{0\})$ est d'intérieur vide, ce qu'on montre par récurrence sur d. La proposition est immédiate pour $d = 1$. Soit $d \geqslant 2$ et f polynomiale non nulle à valeurs réelles, définie sur $\mathbb{R}^d$. Posons

$$f(x_1, \dots, x_d) = f_0(x_1, \dots, x_{d-1}) + f_1(x_1, \dots, x_{d-1})x_d + \dots + f_s(x_1, \dots, x_{d-1})x_d^s$$

Supposons par contraposition qu'il existe $a = (a_1, a_2, \dots, a_d)$ intérieur à $f^{-1}(0)$. Alors l'application polynomiale $g : x \mapsto f(a_1, a_2, \dots, a_{d-1}, x)$ est nulle au voisinage de a_d. Comme un polynôme non nul en une variable ne possède qu'un nombre fini de racines, g est l'application nulle. Les coefficients $f_k(a_1, \dots, a_{d-1})$ de cette application polynomiale sont donc nuls, et c'est vrai aussi de $f_k(b_1, \dots, b_{d-1})$ pour $(b_1, \dots, b_{d-1})$ dans un voisinage de $(a_1, \dots, a_{d-1})$. Par conséquent, chaque f_k s'annule sur un ensemble d'intérieur non vide. Par l'hypothèse de récurrence, f_k est nulle et f aussi.

Partie III : Réduction simultanée

13. La condition sur u considérée ici équivaut à $\phi_{\omega_1} = \phi_\omega \circ u$. Elle admet une solution u unique, qui est bien un isomorphisme, puisque ϕ_ω et ϕ_{ω_1} sont des isomorphismes. On a alors, pour tout $x, y \in E$:

$$\omega(x, u(y)) = -\omega(u(y), x) = -\omega_1(y, x) = \omega_1(x, y) = \omega(u(x), y).$$

Donc $u \in \mathcal{S}$.

14. (a) La relation $\omega(x, u(y)) = \omega(u(x), y)$ s'exprime matriciellement dans la base $\mathcal{B}$: ${}^tXJ_4UY = {}^t(UX)J_4Y$. Ceci étant vrai pour tous vecteurs colonnes X et Y :

$$J_4U = {}^tUJ_4.$$

(b) Écrivons U sous forme de matrice blocs 2×2 : $U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. La condition $J_4U = {}^tUJ_4$ se traduit par $D = {}^tA$, ${}^tB = -B$, ${}^tC = -C$. Comme toute matrice antisymétrique de $\text{M}_2(\mathbb{R})$ est colinéaire à J_2, il existe en effet $N \in \text{M}_2(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $U = \begin{pmatrix} N & \alpha J_2 \\ \beta J_2 & {}^tN \end{pmatrix}$.

(c) Puisque $\det(N - XI_2)$ est le polynôme caractéristique de N, on a

$$T(X) = X^2 - \text{Tr}(N)X + (\det(N) + \alpha\beta).$$

On en déduit :

$$T(U)=\begin{pmatrix} N^2+\alpha\beta J_2^2 & \alpha(NJ_2+\beta J_2{}^tN) \\ \beta(J_2N+\beta{}^tNJ_2) & {}^tN^2+\alpha\beta J_2^2 \end{pmatrix} - \mathrm{Tr}(N)U + (\det(N)+\alpha\beta)I_4.$$

Comme $J_2^2=-I_2$, et $NJ_2+J_2{}^tN={}^tNJ_2+J_2N=\mathrm{Tr}(N)J_2$, il vient :

$$T(U)=\begin{pmatrix} N^2-\mathrm{Tr}(N)N+\det(N)I_2 & 0 \\ 0 & N^2-\mathrm{Tr}(N)N+\det(N)I_2 \end{pmatrix}=0$$

par le théorème de Cayley-Hamilton.

15. L'expression « u n'admet aucune valeur propre réelle » est impropre car une valeur propre d'un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ne saurait être autre chose qu'un réel. Disons plutôt que u n'a aucune valeur propre, ou que U n'a aucune valeur propre réelle. Par conséquent, U admet une valeur propre non réelle et T, qui annule U ainsi une toute valeur propre de U, admet une racine non réelle. Puisqu'il s'agit d'un polynôme de degré deux à coefficients réel, T admet deux racines conjuguées non réelles. En particulier, les racines de T sont simples. Puisque T annule U, on sait que cela entraîne que U est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

   Soit $\lambda\in\mathrm{sp}(U)$ (donc $\lambda\notin\mathbb{R}$). Puisque U est réelle, $\overline{\lambda}$ est valeur propre avec la même multiplicité que λ. Comme U admet au plus deux valeurs propres (car U annule T qui est de degré 2), $\mathrm{sp}(U)=\{\lambda,\overline{\lambda}\}$ et ces deux valeurs propres sont de multiplicité 2. Puisque U est diagonalisable, les espaces propres sont de dimension 2. On peut donc choisir Z et $Y\in\mathbb{C}^4$, linéairement indépendants, tels que $UZ=\lambda Z$ et $UY=\lambda Y$.

16. Le couple (Z,Y) est une $\mathbb{C}$-base de l'espace propre $E_\lambda(U)$, et $(\overline{Z},\overline{Y})$ est une base de $E_{\overline{\lambda}}(U)$. Comme $\mathbb{C}^4$ est somme directe de ces deux espaces propres, $(Z,\overline{Z},Y,\overline{Y})$ est une $\mathbb{C}$-base de $\mathbb{C}^4$. Donc $(Z_1,Z_2,Y_1,-Y_2)$ aussi (c'est à l'évidence une famille $\mathbb{C}$-génératrice), qui est une famille $\mathbb{C}$-libre et, par conséquent $\mathbb{R}$-libre : c'est une base de $\mathbb{R}^4$ et $(z_1,z_2,y_1,-y_2)$ est une base de E.

17. De $J_4U={}^tUJ_4$ on déduit ${}^tZJ_4U\overline{Z}={}^tZ{}^tUJ_4\overline{Z}$ d'où, puisque $UZ=\lambda Z$ et $U\overline{Z}=\overline{\lambda Z}$, $\overline{\lambda}{}^tZJ_4\overline{Z}=\lambda{}^tZJ_4\overline{Z}$ et, λ n'étant pas réel, ${}^tZJ_4\overline{Z}=0$, c'est-à-dire ${}^tZ_1J_4\overline{Z_1}+i{}^tZ_2J_4\overline{Z_1}-i{}^tZ_1J_4\overline{Z_2}+{}^tZ_2J_4\overline{Z_2}=0$ ou encore

   $$\omega(z_1,z_1)+i(\omega(z_2,z_1)-\omega(z_1,z_2))+\omega(z_2,z_2)=0.$$

   Comme ω est antisymétrique, il vient $\omega(z_1,z_2)=0$.
   On a de la même manière ${}^tYJ_4\overline{Y}=0$ et ${}^tZJ_4\overline{Y}=0$, d'où $\omega(y_1,y_2)=0$, $\omega(z_1,y_1)+\omega(z_2,y_2)=0$ et $\omega(z_2,y_1)-\omega(z_1,y_2)=0$.

18. Comme ω est symplectique et $\omega(z_1,x)=0$ pour tout $x\in\mathrm{Vect}(z_1,z_2)$, on a $\omega(z_1,y_1)\neq 0$ ou $\omega(z_1,y_2)\neq 0$, donc ${}^tZ_1J_4Y\neq 0$. On peut donc poser $\xi=-\dfrac{1}{{}^tZ_1J_4Y}$, et l'on a ${}^tZ_1J_4(\xi Y)=-1$. En substituant ξY à Y, on a bien $\omega(z_1,y_1)=-1$ et $\omega(z_1,y_2)=0$.

19. Posons $\lambda=a+ib$. Les relations $UZ=\lambda Z$ et $UY=\lambda Y$ se traduisent par

   $$\begin{cases} UZ_1=aZ_1-bZ_2 \\ UZ_2=bZ_1+aZ_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} UY_1=aY_1+b(-Y_2) \\ U(-Y_2)=-bY_1+a(-Y_2) \end{cases}.$$

   La matrice de u dans la base $\tilde{\mathcal{B}}=(z_1,z_2,y_1,-y_2)$ est donc

   $$\begin{pmatrix} a & -b & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix}$$

   Soient $r>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$ tels que $\lambda=re^{i\theta}$ (avec $\theta\notin\pi\mathbb{Z}$ car $\lambda\notin\mathbb{R}$), cette matrice s'écrit

   $$r\begin{pmatrix} R_\theta & 0 \\ 0 & R_{-\theta} \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, les relations $\omega(z_1, y_1) = -1$, $\omega(z_2, -y_2) = \omega(z_1, y_1) = -1$ et $\omega(z_1, -y_2) = \omega(z_2, y_1) = 0$ montrent que le bloc 2×2 « en haut à droite » de la matrice de ω dans la base $\tilde{\mathcal{B}}$ est $-I_2$. Comme $\omega(z_1, z_2) = \omega(y_1, y_2) = 0$, la matrice de ω dans $\tilde{\mathcal{B}}$ est bien J_4.

Enfin, puisque $\omega_1(x, y) = \omega(ux, y) = {}^tX{}^tUJ_4Y$, la matrice de ω_1 est

$$ {}^tUJ_4 = r\begin{pmatrix} 0 & -R_{-\theta} \\ R_\theta & 0 \end{pmatrix}. $$

20. Comme F_j est le noyau de $P_j(u)$ qui commute avec u, F_j est stable par u. La décomposition $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_r$ résulte du lemme des noyaux.

21. Soit $j, k \in \{1, \ldots, r\}$ distincts. Par le théorème de Bézout, il existe $U, V \in \mathbb{R}[X]$ tels que $VP_j + WP_k = 1$. On a, pour tous $x \in F_j$ et $y \in F_k$: $\omega(P_j(u)(x), y) = 0$ (car $P_j(u)(x) = 0$) et $\omega(P_k(u)(x), y) = \omega(x, P_k(u)(y)) = 0$. Comme F_j est stable par u, $V(u)(x)$ et $W(u)(x)$ appartiennent à F_j. En appliquant les deux relations précédentes à ces vecteurs, il vient :

$$ \omega(P_j(u)(V(u)(x)), y) = 0 \quad \omega(P_j(u)(W(u)(x)), y) = 0, $$

d'où $\omega((P_jV + P_kW)(u)(x), y) = 0$, c'est-à-dire $\omega(x, y) = 0$. En outre, puisque $u(x) \in F_j$, $\omega_1(x, y) = \omega(u(x), y) = 0$. Ceci montre $F_k \subset F_j^{\omega}$ et $F_k \subset F_j^{\omega_1}$.

22. Considérons une base $\mathcal{B}_k$ de F_k et $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_r)$. Comme les F_k sont deux à deux orthogonaux pour ω, la matrice M de ω dans $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs $\mathrm{Diag}(M_1, \ldots, M_r)$, où M_k est la matrice de la restriction de ω à $F_k \times F_k$. Comme ω est symplectique, M est inversible et chaque M_k est inversible. Donc la restriction de ω à $F_k \times F_k$ est symplectique. Il en va de même pour ω_1.

23. Supposons que χ_u n'admette aucune racine double dans $\mathbb{C}$, de sorte que χ_u est le produit de polynômes $P_1, \ldots, P_r \in \mathbb{R}[X]$ deux à deux premiers entre eux, chacun de l'une des formes suivantes :

$$ \begin{cases} X - a, a \in \mathbb{R}^*, \\ (X-a)^2, a \in \mathbb{R}^*, \\ (X-\lambda)(X-\overline{\lambda}), \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \\ (X-\lambda)^2(X-\overline{\lambda})^2, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \end{cases} $$

Posons $F_j = \mathrm{Ker}(P_j(u))$. Les F_j sont stables par u et leur somme directe est égale à E d'après **20.**. Soit u_j l'endomorphisme induit par u sur F_j, de sorte que $P_j(u_j) = 0$. On voit matriciellement que $\chi_u = \prod_{i=1}^{r} \chi_{u_i}$. Puisque $P_j(u_j) = 0$, les valeurs propres réelles ou complexes de u (ou plutôt d'une matrice représentant u...) sont des racines de P_j. Donc χ_j est premier avec chaque P_k, $k \neq j$. De $\prod_j P_j = \prod_j \chi_j$, on déduit alors (tous ces polynômes sont unitaires) $\chi_j = P_j$ puis $\dim F_j = \deg(P_j) \in \{1, 2, 4\}$. Comme ω induit une forme symplectique sur F_j, F_j est de dimension paire, ce qui exclut $\dim F_j = 1$. Chaque F_j est donc de dimension 2 ou 4 et on conclut par **22.**.

Apportons une précision : si E est de dimension 2, $A(E)$ est une droite et deux formes symplectiques sont donc proportionnelles. Il existe donc $a \in \mathbb{R}^*$ tel que $\omega_1 = a\omega$. On a alors $\phi_{\omega_1} = a\phi_\omega$ donc $\phi_\omega \circ u = a\phi_\omega = \phi_\omega \circ (a\mathrm{Id}_E)$, d'où $u = a\mathrm{Id}_E$ (ce qu'on retrouverait aussi en appliquant les méthodes de **14.**). Si l'on applique ceci, dans le cadre de cette question, à l'espace F_j lorsqu'il est de dimension 2, on voit que u_j est une homothétie. En particulier, le polynôme P_j n'est jamais de la forme $(X-\lambda)(X-\overline{\lambda})$.

Partie IV : Structures complexes domptées simultanément

24. Supposons que les racines complexes du polynôme caractéristique de u soient de multiplicité au plus 2 et montrons, sous cette hypothèse, que $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont simultanément vrais ou faux. Il suffit

d'établir ces énoncés dans le cas où E est de dimension 2 ou 4 car les résultats de **23.**, permettent aisément d'en déduire le cas général (chaque $\mathcal{F}_i$ est vraie sur E si et seulement si les formes restreintes aux F_j la vérifient). Le cas de la dimension 2 est immédiat : ω_1 et ω_2 sont proportionnelles et $\mathcal{F}_1$, tout comme $\mathcal{F}_2$, est vraie si et seulement si le coefficient de proportionnalité est (strictement) positif.

Supposons donc E de dimension 4 et reprenons le contexte de **19.**. Montrons que (si les racines complexes du polynôme caractéristique de u sont de multiplicité au plus 2) $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont tous les deux vrais.

• Pour établir $\mathcal{F}_1$, remarquons d'abord que, pour tous vecteurs colonnes X_1, X_2 de $\mathbb{C}^2$,

$$({}^tX_1, {}^tX_2)(-J_4)\begin{pmatrix} 0 & R_\theta \\ -R_{-\theta} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = {}^tX_1 R_\theta X_1 + {}^tX_2 R_\theta X_2 = \cos(\theta)(\|X_1\|_2^2 + \|X_2\|_2^2).$$

Donc la structure complexe de matrice $(-J_4)$ est domptée par la forme symplectique de matrice $\begin{pmatrix} 0 & R_\theta \\ -R_{-\theta} & 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si $\cos(\theta) > 0$.

Effectuons alors le changement de base de matrice $\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & R_{-\phi} \end{pmatrix}$, où $\phi \in \mathbb{R}$. La matrice de ω dans cette nouvelle base est

$$^t\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & R_{-\phi} \end{pmatrix} J_4 \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & R_{-\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -R_{-\phi} \\ R_\phi & 0 \end{pmatrix}$$

et la matrice de ω_1 est

$$r \ {}^t\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & R_{-\phi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -R_{-\theta} \\ R_\theta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & R_{-\phi} \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 0 & -R_{-(\theta+\phi)} \\ R_{\theta+\phi} & 0 \end{pmatrix}$$

Choisissons ϕ tel que $\cos(\phi) > 0$ et $\cos(\theta + \phi) > 0$ (ça existe). Alors $(-J_4)$ est domptée par ω et par ω_1.

• Pour tout $t \in [0, 1]$, la matrice $(1-t)J_4 + tr\begin{pmatrix} 0 & -R_{-\theta} \\ R_\theta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -(1-t)I_2 - R_{-\theta} \\ (1-t)I_2 + R_\theta & 0 \end{pmatrix}$ est inversible car $(1-t)I_2 + R_\theta$ l'est (R_θ n'admet pas de valeur propre réelle). D'où $\mathcal{F}_2$.

25. Posons $\mathcal{S}_0 = \{u \in \mathrm{L}(E);\ \forall x, y, \omega(x, u(y)) = \omega(u(x), y)\}$, de sorte que $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$. L'ensemble $\mathcal{S}_0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{L}(E)$, disons de dimension d. Choisissons-en une base et notons $x_1, \ldots, x_d$ les coordonnées d'un élément $u \in \mathcal{S}_0$. Les racines complexes de χ_u sont au plus doubles si et seulement si $r(\chi_u') \neq 0$. L'application $f(x_1, \ldots, x_d) = r(\chi_u')$ est une application polynomiale non nulle sur $\mathbb{R}^d$. Par **12.**, l'ensemble des $u \in \mathcal{S}_0$ dont le polynôme caractéristique est à racines au plus doubles est dense dans $\mathcal{S}_0$. Enfin, puisque $\mathrm{GL}(E)$ est un ouvert dense de $\mathrm{L}(E)$, l'ensemble des $u \in \mathcal{S}$ dont le polynôme caractéristique est à racines au plus doubles est dense dans $\mathcal{S}$.

26. Pas grand chose semble-t-il... Supposons $\mathcal{F}_2$. Il existe d'après **25.** une suite $(v_k)_{k\geqslant 2}$ d'éléments de $\mathcal{S}$ qui converge vers u et telle que le polynôme caractéristique de chaque v_k soit à racines au plus doubles. Soit ω_k la forme bilinéaire définie par $\phi_{\omega_k} = \phi_\omega \circ v_k$. C'est une forme symplectique et le segment $[\omega, \omega_k]$ est contenu dans l'ensemble des formes symplectiques dès que k est assez grand. Par **24.**, il existe, pour k assez grand une structure complexe domptée par ω et ω_k. Si on peut en extraire une sous-suite convergente, on obtient une structure complexe domptée par ω et ω_1. Mais l'ensemble des structures complexes n'est pas compact (c'est matriciellement la classe de similitude de J_n), pas plus que l'ensemble des structures complexes domptées par ω. So... ?