Commentaires - Concours blanc

I Préliminaires

1. OK.

2. Il faut détailler l'expression de $\varphi(t)$ pour t réel. L'espace E n'est pas supposé de dimension finie et on ne peut donc pas utiliser directement les résultats du cours vus avec un opérateur bilinéaire en dimension finie.

3. Le calcul de $\|\gamma(t)\|$ avec t réel a été bien traité mais l'égalité $\varphi'(0) = 0$ a été peu réussie.

4. Il faut repartir de l'expression développée à la question 2 ou alors justifier que γ et $u \circ \gamma$ sont à valeurs dans un espace de dimension finie pour dériver directement dans le produit scalaire.

5. Personne n'a réussi cette question. Il fallait utiliser la structure préhilbertienne induite pour l'espace F.

II Étude d'un opérateur

6. OK.

7. Très peu ont réussi cette question. Dès lors qu'on fige s ou t dans $[\,0\,;1\,]$, on travaille dans une direction particulière qui ne permet pas d'établir la continuité de l'application K.

8. Plusieurs confusions sur cette question difficile : pour $f \in \mathrm{E}$, il faut justifier que $\mathrm{T}(f)$ est bien défini puis vérifier que $\mathrm{T}(f) \in \mathrm{E}$ (intégrale à paramètre), justifier la linéarité de T et enfin établir la continuité de l'application linéaire T (lipschitzienne en zéro) pour la norme considérée, à savoir la norme euclidienne.

9. Question un peu calculatoire, pas trop difficile mais qui demande du soin et qui est décisive pour la suite. Hélas, plusieurs échouent à mener les calculs d'intégration sans erreur : la pratique régulière du calcul est indispensable.

10. OK pour ceux qui ont bien traité la question précédente.

11. OK.

12. Question délicate très peu réussie : il faut utiliser la relation de Chasles et invoquer à bon escient le théorème fondamental d'intégration.

13. Question moyennement réussie bien qu'elle soit très abordable en admettant le résultat de la question précédente.

14. Question très difficile, réussie dans une seule copie. La description de l'image de T est suggérée par les questions précédentes mais cela demande toutefois une certaine hauteur de vue.

15. OK. Il faut cependant justifier que la fonction f est bien deux fois dérivable, ce qui est le cas puisque $\lambda \neq 0$.

16. Question pas très bien réussie alors qu'il s'agit, en partie, de résultats du cours très classiques. Il faut penser à distinguer les cas $\lambda > 0$, $\lambda < 0$ et il faut également penser à effectuer la synthèse en vérifiant que les valeurs candidates pour être valeurs propres et les vecteurs correspondants sont bien solutions (étape délicate).

17. Question réussie dans trois copies. Une simple intégration par partie permet de conclure, il est un peu dommage que si peu y soient parvenus.

18. Question très peu abordée bien que très facile avec l'indication fournie dans le sujet.

19. OK.

20. Question technique, réussie dans quelques copies. Il y avait une coquille dans le sujet (coquille laissée volontairement) : la somme est évidemment une somme en k et non en n.

21. Peu réussie et plusieurs confusions : la norme considérée ici est la norme associée au produit scalaire. La plus grande finesse de $\|\cdot\|_\infty$ par rapport à $\|\cdot\|$ permet d'aboutir efficacement.

22. Plusieurs difficultés dans cette question : étant donnée $f \in \mathrm{E}$, il faut notamment établir $\|p_{\mathrm{N}}(f)-f\| \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 0$ en utilisant les propriétés de la projection orthogonale ainsi que le caractère totale de la suite $(g_k)_k$ puis utiliser la continuité de T pour établir $\|\mathrm{T}(f_{\mathrm{N}}) - \mathrm{T}(f)\| \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 0$. On conclut par unicité de la limite.

III Exemples d'espaces à noyau reproduisant

23. Personne n'a réussi cette question. Énormément d'arnaques, conscientes ou inconscientes. Pour $f \in \mathrm{E}_1$, la dérivée f' n'est pas continue et le caractère défini du produit scalaire demande un vrai travail (relation de Chasles et raccord).

24. Bien réussie.

25. Peu réussie. L'enchainement de deux questions est un peu déroutant : il semble plus facile de répondre d'abord à la seconde puis à la première, en utilisant le résultat auxiliaire $\mathrm{T}(f'') = -f$ pour $f \in \mathrm{E}_1$ de classe $\mathscr{C}^2$, établi lors de la réponse à la question 14.

26. Question difficile et déroutante : on pourrait penser qu'il faut exploiter le résultat de la question précédente avec un argument de densité mais ces pistes ne semblent pas aboutir.

27. Question pas si difficile bien que peu abordée. La continuité de l'évaluation mérite le détail avec un recours à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

28. Personne n'a réussi cette question.

29. Réussite très mitigée sur une question très simple, c'est dommage !

30. Il est indispensable de justifier l'existence de $\langle f, g\rangle$ pour $(f, g) \in \mathrm{E}_2^2$. La suite est triviale.

31, 32. Questions faciles mais peu abordées.

Quasiment plus personne sur la suite.