


## Programme de colles

 Venir avec un cahier de colles : y coller les énoncés des exercices et les reprendre à l'issue de la colle.

**Semaine 15**      26/01/26 - 30/01/26

### Programme :

Probabilités :

- Tribu, événement, espace probabilisable, système complet dénombrable, probabilité,  $\sigma$ -additivité, espace probabilisé, propriétés (probabilité d'une union, du complémentaire d'un événement, croissance, ...), stabilité d'une tribu par intersection dénombrable, continuité croissante, continuité décroissante, sous-additivité (inégalité de Boole), événement négligeable, événement presque sûr, système quasi-complet, distribution de probabilité discrète ;
- Probabilité conditionnelle, formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formules de Bayes, événements indépendants, famille dénombrable d'événements indépendants ;
- Variable aléatoire discrète, support d'une loi (hors-programme), loi d'une variable aléatoire discrète, loi de  $X$  caractérisée par  $(\mathbb{P}(X = x))_{\text{supp } X}$ , égalité en loi, fonction d'une variable aléatoire, loi conditionnelle, couple de variables aléatoires discrètes, loi conjointe, lois marginales, vecteur aléatoire discret, variables aléatoires discrètes indépendantes, famille finie ou dénombrable de variables aléatoires discrètes indépendantes, fonctions de variables ou de vecteurs aléatoires discrets indépendants, lemme des coalitions ;
- Espérance, formule d'antirépartition, espace  $L^1$ , variable centrée, théorème de transfert, linéarité de l'espérance, positivité, croissance, espérance d'un produit de deux variables indépendantes d'espérance finie, espérance finie d'une variable aléatoire majorée en valeur absolue par une autre variable d'espérance finie, séparation presque sûr de l'espérance ;
- Espace  $L^2$ , inclusion  $L^2 \subset L^1$ , variance, écart-type, relation de König-Huygens, variable réduite, centrée réduite, espérance finie d'un produit de deux variables dans  $L^2$ , structure d'espace vectoriel, inégalité de Cauchy-Schwarz, covariance, relation de König-Huygens, covariance nulle pour des variables indépendantes, variance d'une somme de variables aléatoires (décorrélées ou pas) ;
- Inégalité de Markov, inégalité de Bienaymé-Tchebychev ;
- Fonction génératrice définie sur  $[0; 1]$ , rayon de convergence et convergence normale sur  $[-1; 1]$  de la série entière associée, continuité, caractérisation de la loi par la fonction génératrice, la dérivabilité en 1 équivaut à l'espérance finie, variance à partir de la dérivée seconde en 1, somme de variables aléatoires indépendantes ;
- Loi géométrique, définition, propriétés, loi de Poisson, définition, propriétés ;
- Loi des événements rares (approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson), loi faible des grands nombres.

**Questions de cours :** (avec preuve sauf mention contraire)

1. Pour  $X, Y$  indépendantes à valeurs dans  $E$  et  $F$  respectivement, calcul de  $\mathbb{P}(X \in A, Y \in B)$  avec  $A \subset E$  et  $B \subset F$  ;
2. Si  $X, Y$  sont indépendantes, alors  $f(X)$  et  $g(Y)$  le sont aussi et application au lemme des coalitions ;
3. Formule d'antirépartition ;
4. Théorème de transfert (preuve réservée au groupe (+)) ;
5. Linéarité de l'espérance ;
6. Si  $X, Y$  sont dans  $L^1$  et indépendantes, alors  $XY \in L^1$  et  $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$  ;
7. Si  $|X| \leq Y$  avec  $Y \in L^1$ , alors  $X \in L^1$  et  $\mathbb{E}(|X|) \leq \mathbb{E}(Y)$  ;
8.  $L^2 \subset L^1$ , produit de 2 variables aléatoires dans  $L^2$  ;
9. Variance d'une somme (cas général, cas avec décorrélation) ;
10. Inégalité de Markov et méthode de Chernoff ;
11. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev ;
12. Fonction génératrice d'une somme de variables aléatoires indépendantes ;
13. Espérance, variance, fonction génératrice d'une loi géométrique ;
14. Espérance, variance, fonction génératrice d'une loi de Poisson ;
15. Loi faible des grands nombres.