ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026 26/01/26

Préparation à l'interrogation n°16

1 Étude asymptotique

1. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de $\sqrt{1+x}$
2. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$
3. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de
$$1-\cos(t)^n = 1-\left(1-\frac{t^2}{2}+\mathrm{o}(t^2)\right)^n = 1-\left(1-\frac{nt^2}{2}+\mathrm{o}(t^2)\right) = \frac{nt^2}{2}+\mathrm{o}(t^2)$$
4. $\mathrm{ch}\left(\dfrac{t}{\sqrt{n}}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{t^2}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}+\mathrm{o}(1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}$

2 Trigonométrie

Linéariser :

1. $\cos(a)\cos(b)$;
2. $\sin(a)\cos(b)$.

3 Calcul intégral

1. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ avec $\alpha \neq 1$;
2. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}$;
3. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{a^2+t^2}$ avec $a \neq 0$;

4 Exercices types

1. Fonction Γ : relation fonctionnelle, régularité $\mathscr{C}^\infty$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$;
2. Polynôme caractéristique d'une matrice compagne ;
3. Compacité de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$;
4. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ ouvert dense de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$;
5. Fermeture de $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

5 Exercice type

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et de même loi. Déterminer la loi de $\mathrm{U} = \max(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$ en fonction de $\mathrm{F} = \mathrm{F}_{\mathrm{X}_1}$ (fonction de répartition de X_1).

Corrigé : On a $\mathrm{U}(\Omega) \subset \mathbb{N}$ puis pour k entier
$$\mathbb{P}(\mathrm{U}=k) = \mathbb{P}(\{\mathrm{U} \leqslant k\} \smallsetminus \{\mathrm{U} \leqslant k-1\}) = \mathbb{P}(\mathrm{U} \leqslant k) - \mathbb{P}(\mathrm{U} \leqslant k-1)$$

Par indépendance $\quad \mathbb{P}(\mathrm{U} \leqslant k) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{\mathrm{X}_i \leqslant k\}\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(\mathrm{X}_i \leqslant k) = \mathrm{F}(k)^n$

Ainsi $\quad \boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}(\mathrm{U}=k) = \mathrm{F}(k)^n - \mathrm{F}(k-1)^n}$

6 Exercice type

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé et $X_1, \ldots, X_n$ variables aléatoires indépendantes avec $X_i \sim \mathscr{P}(\lambda_i)$ et les $\lambda_i > 0$. Déterminer la loi de $\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Corrigé : On a $G_{X_i}(t) = e^{\lambda_i(t-1)}$ pour $t \in [\,0\,;1\,]$ et $i \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]$. Par indépendance des X_i, notant $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, il vient

$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad G_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i(t-1)} = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t-1)\right)$$

Comme la fonction génératrice caractérise la loi, on en déduit que

$$\boxed{S_n \sim \mathscr{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)}$$

7 Exercice type

Soit n entier. Déterminer le reste de la division euclidienne X^n par $(X-a)^2$ avec a réel.

Corrigé : D'après le théorème de la division euclidienne, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$X^n = (X-a)^2 Q + R \tag{$*$}$$

Notant $S = (X-a)^2 Q$, on observe que S admet a pour racine double d'où $S(a) = S'(a) = 0$. En substituant X par a dans $(*)$ puis dans la relation obtenue par dérivation de $(*)$, on obtient

$$\begin{cases} a^n = \alpha a + \beta \\ n a^{n-1} = \alpha \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = n a^{n-1} \\ \beta = (1-n) a^n \end{cases}$$

Ainsi $\boxed{\text{Si } a = b, \text{ on a } R = n a^{n-1} X + (1-n) a^n}$

Variante : Avec la formule de Taylor, on a

$$P = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k = R + (X-a)^2 Q \quad \text{et} \quad R = P(a) + P'(a)(X-a)$$

Pour $P = X^n$ spécifiquement, on peut développer un binôme

$$X^n = (X - a + a)^n = a^n + n a^{n-1}(X-a) + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} (X-a)^k$$

8 Questions de cours

Équations différentielles (début), développements en série entière usuels, graphes usuels.