Feuille d'exercices n°66

Exercice 1 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre $p \in \left]0\,;1\right[$ et $\mathrm{Y}_n = \min(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$ pour tout n entier non nul.

1. Déterminer $\mathbb{P}(\mathrm{Y}_n > k)$ pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.
2. En déduire que pour n entier non nul, la variable aléatoire Y_n suit une loi usuelle dont on précisera le paramètre.

Corrigé : 1. Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. On a

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}_n > k) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{\ell=k+1}^{+\infty} \{\mathrm{X}_n = \ell\}\right) = \sum_{\ell=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X}_n = \ell) = \sum_{\ell=k+1}^{+\infty} p(1-p)^{\ell-1}$$

d'où
$$\boxed{\forall (n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}(\mathrm{X}_n > k) = p(1-p)^k \times \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^k}$$

Puis
$$\{\mathrm{Y}_n > k\} = \{\min(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n) > k\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{\mathrm{X}_i > k\}$$

Comme les X_i sont indépendantes, il s'ensuit

$$\mathbb{P}(\mathrm{Y}_n > k) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{X}_i > k) = \prod_{i=1}^{n} (1-p)^k$$

Ainsi
$$\boxed{\forall (n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}(\mathrm{Y}_n > k) = (1-p)^{kn}}$$

2. On a $\qquad \{\mathrm{Y}_n = k\} = \{\mathrm{Y}_n > k-1\} \setminus \{\mathrm{Y}_n > k\} \quad$ et $\quad \{\mathrm{Y}_n > k\} \subset \{\mathrm{Y}_n > k-1\}$

d'où

$$\mathbb{P}(\mathrm{Y}_n = k) = \mathbb{P}(\mathrm{Y}_n > k-1) - \mathbb{P}(\mathrm{Y}_n > k) = (1-p)^{(k-1)n} - (1-p)^{kn} = (1-p)^{(k-1)n}(1-(1-p)^n)$$

On conclut

$$\boxed{\text{La variable aléatoire } \mathrm{Y}_n \text{ suit une loi géométrique de paramètre } 1-(1-p)^n.}$$

Exercice 2 (***)

On effectue une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce donnant pile avec probabilité $p \in \left]0\,;1\right[$ et face avec probabilité $q = 1-p$. On dit que la première série est de longueur $n \geqslant 1$ si les n premiers lancers ont donné le même côté et le $n+1$ l'autre côté. La deuxième série commence au lancer suivant la fin de la première série et se termine (si elle se termine) au lancer précédant un changement de côté. Pour $k \geqslant 1$, on note P_k l'événement pile au k-ième lancer F_k face au k-ième lancer et L_1 et L_2 les longueurs respectives des deux séries.

1. Déterminer la loi de L_1.
2. Justifier que L_1 est d'espérance finie puis la calculer.

3. Déterminer la loi de L_2.
4. Justifier que L_2 est d'espérance finie puis la calculer.
5. Les variables aléatoires L_1 et L_2 sont-elles indépendantes ?

Corrigé : 1. On a $L_1(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ puis

$$\forall k \geqslant 1 \qquad \{L_1 = k\} = P_1 \dots P_k F_{k+1} \sqcup F_1 \dots F_k P_{k+1}$$

D'où
$$\boxed{\forall k \geqslant 1 \qquad \mathbb{P}(L_1 = k) = p^k q + q^k p}$$

2. Les séries entières $\sum x^n$ et $\sum n x^n$ ont même rayon de convergence égal à 1 ce qui prouve la convergence (absolue) de $\sum k\mathbb{P}(L_1 = k)$. Par dérivation d'une série, on trouve

$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{et} \quad xS'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Ainsi
$$\boxed{\mathbb{E}(L_1) = \frac{p}{q} + \frac{q}{p}}$$

3. On a $L_2(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ puis

$$\begin{aligned}\forall n \geqslant 1 \qquad \{L_2 = n\} &= \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}^*} \{L_2 = n, L_1 = k\} \\ &= \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}^*} (P_1 \dots P_k F_{k+1} \dots F_{k+n} P_{k+n+1} \sqcup F_1 \dots F_k P_{k+1} \dots P_{k+n} F_{k+n+1})\end{aligned}$$

Ainsi
$$\forall n \geqslant 1 \qquad \mathbb{P}(L_2 = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[p^k q^n p + q^k p^n q\right]$$

D'où
$$\boxed{\forall n \geqslant 1 \qquad \mathbb{P}(L_2 = n) = p^2 q^{n-1} + q^2 p^{n-1}}$$

4. Par les mêmes arguments que pour L_1, la variable aléatoire L_2 est d'espérance finie et on trouve

$$\boxed{\mathbb{E}(L_2) = \frac{p^2}{p^2} + \frac{q^2}{q^2} = 2}$$

5. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(L_1 = 1, L_2 = 1) = \mathbb{P}(L_1 = 1)\mathbb{P}(L_2 = 1) &\iff pqp + qpq = 2pq(p^2 + q^2) \\ &\iff p^2 + q^2 = \frac{1}{2} \iff p(1-p) = \frac{1}{4} \iff p = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Donc, pour $p \neq \dfrac{1}{2}$, les variables aléatoires L_1 et L_2 sont dépendantes. Supposons $p = \dfrac{1}{2}$. Soit $(k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On a

$$\mathbb{P}(L_1 = k, L_2 = n) = \frac{1}{2^{k+n+1}} + \frac{1}{2^{k+n+1}} = \frac{1}{2^{k+n}}$$

et
$$\mathbb{P}(L_1 = k) = \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k} \qquad \mathbb{P}(L_2 = n) = \frac{1}{2^{2+n-1}} + \frac{1}{2^{2+n-1}} = \frac{1}{2^n}$$

Ainsi
$$\forall (k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \qquad \mathbb{P}(L_1 = k, L_2 = n) = \mathbb{P}(L_1 = k)\mathbb{P}(L_2 = n)$$

On conclut
$$\boxed{\text{Les variables } L_{1,2} \text{ sont indépendantes si et seulement si } p = \frac{1}{2}.}$$

Exercice 3 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et Y une variable aléatoire réelle discrète centrée telle que $\mathrm{Y}(\omega) \subset [\,a\,;b\,]$. Montrer

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \ln \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{Y}}) \leqslant \frac{\lambda^2 (b-a)^2}{8}$$

Corrigé : Soit $\mathrm{Z} = \mathrm{Y} - \dfrac{a+b}{2}$. On trouve

$$\mathbb{V}(\mathrm{Y}) = \mathbb{V}(\mathrm{Z}) \leqslant \mathbb{E}(\mathrm{Z}^2) \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}$$

Soit λ réel. On pose $\qquad \forall \mathrm{A} \in \mathscr{A} \qquad \mathbb{Q}(\mathrm{A}) = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\mathrm{A}} \dfrac{\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{Y}}}{\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{Y}})}\right)$

On vérifie sans difficulté que $\mathbb{Q}$ définit une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(\mathrm{Y})$ est d'espérance finie. Par transfert, il vient

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(f(\mathrm{Y})) = \sum_{y \in \mathrm{Y}(\Omega)} f(y) \mathbb{Q}(\mathrm{Y} = y) = \sum_{y \in \mathrm{Y}(\Omega)} f(y) \mathrm{e}^{\lambda y} \frac{\mathbb{P}(\mathrm{Y} = y)}{\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{Y}})} = \frac{\mathbb{E}(f(\mathrm{Y}) \mathrm{e}^{\lambda \mathrm{Y}})}{\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{Y}})}$$

Puis, d'après la relation de König-Huygens

$$\mathbb{V}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{Y}) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{Y}^2) - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{Y})^2 = \frac{\mathbb{E}(\mathrm{Y}^2 \mathrm{e}^{\lambda \mathrm{Y}})}{\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{Y}})} - \left(\frac{\mathbb{E}(\mathrm{Y} \mathrm{e}^{\lambda \mathrm{Y}})}{\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{Y}})}\right)^2$$

On pose $\qquad \forall (n, \lambda) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \qquad u_n(\lambda) = \mathrm{e}^{\lambda y_n} \mathbb{P}(\mathrm{Y} = y_n)$

Les u_n sont de classe $\mathscr{C}^k$ avec k entier et

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n^{(k)}(\lambda) = y_n^k \mathrm{e}^{\lambda y_n}$$

La fonction $(\lambda, y) \mapsto \mathrm{e}^{\lambda y}$ est bornée sur le compact $[\,\alpha\,;\beta\,] \times [\,a\,;b\,]$ d'où

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|u_n^{(k)}\|_{\infty, [\,\alpha\,;\beta\,]} = \mathrm{O}(\mathbb{P}(\mathrm{Y} = y_n))$$

ce qui prouve la convergence normale et donc uniforme de $\sum u_n^{(k)}$. Par dérivation d'une série de fonction, il vient

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\lambda^k} \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{Y}}) = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\lambda^k} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda y_n} \mathbb{P}(\mathrm{Y} = y_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} y_n^k \mathrm{e}^{\lambda y_n} \mathbb{P}(\mathrm{Y} = y_n) = \mathbb{E}(\mathrm{Y}^k \mathrm{e}^{\lambda \mathrm{Y}})$$

Puis on trouve $\qquad \mathbb{V}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{Y}) = \varphi''(\lambda) \quad$ avec $\quad \varphi(\lambda) = \ln \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{Y}})$

En observant $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ et avec $\mathbb{V}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{Y}) \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{4}$, il vient par intégration

$$\varphi'(\lambda) = \int_0^\lambda \varphi''(s)\, \mathrm{d}s \leqslant \int_0^\lambda \frac{(b-a)^2}{4}\, \mathrm{d}s = \frac{(b-a)^2 \lambda}{4}$$

et

$$\varphi(\lambda) = \int_0^\lambda \varphi'(s)\, \mathrm{d}s \leqslant \int_0^\lambda \frac{(b-a)^2 \lambda}{4}\, \mathrm{d}s = \frac{(b-a)^2 \lambda^2}{8}$$

On conclut

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \ln \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{Y}}) \leqslant \frac{\lambda^2 (b-a)^2}{8}}$$

Remarque : Il s'agit du résultat intermédiaire délicat pour établir l'inégalité de concentration dite *inégalité de Hoeffding*

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{S}_n - \mathbb{E}(\mathrm{S}_n) \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \exp\left(-\frac{2\varepsilon^2}{n(b-a)^2}\right)$$

avec $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ variables aléatoires discrètes à valeurs dans $[\,a\,;b\,]$, $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ et $\varepsilon > 0$.

Exercice 4 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle positive d'espérance finie.

Montrer
$$\mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant x) \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

On pourra commencer par le cas $\mathrm{X}(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

Corrigé : Soit $x > 0$. En s'inspirant de la démonstration de l'inégalité de Markov, on écrit

$$\mathrm{X} \geqslant \mathrm{X}\mathbb{1}_{\{\mathrm{X} \geqslant x\}} \geqslant x\mathbb{1}_{\{\mathrm{X} \geqslant x\}}$$

La variable $\mathrm{X}\mathbb{1}_{\{\mathrm{X} \geqslant x\}}$ est donc d'espérance finie avec

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}\mathbb{1}_{\{\mathrm{X} \geqslant x\}}) \geqslant x\mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant x)$$

Supposons $\mathrm{X}(\Omega) \subset \mathbb{N}$. On a

$$0 \leqslant \mathbb{E}(\mathrm{X}\mathbb{1}_{\{\mathrm{X} \geqslant x\}}) \leqslant \mathbb{E}(\mathrm{X}\mathbb{1}_{\{\mathrm{X} \geqslant \lfloor x \rfloor\}}) = \sum_{k=\lfloor x \rfloor}^{+\infty} k\mathbb{P}(\mathrm{X} = k)$$

La série $\sum k\mathbb{P}(\mathrm{X} = k)$ converge et par conséquent, son reste est de limite nulle d'où

$$\sum_{k=\lfloor x \rfloor}^{+\infty} k\mathbb{P}(\mathrm{X} = k) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

Et dans le cas particulier où $\mathrm{X}(\Omega) \subset \mathbb{N}$, on a donc prouvé

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant x) \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

On ne suppose plus désormais que X est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Si $\mathrm{X}(\Omega)$ est fini, alors $\mathrm{X}\mathbb{1}_{\{\mathrm{X} \geqslant x\}}$ est nulle pour x assez grand et le résultat est trivial. Sinon, on note $\mathrm{X}(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$. Il vient

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}\mathbb{1}_{\{\mathrm{X} \geqslant x\}}) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \mathbb{1}_{[\,0\,;x_n\,]}(x)\mathbb{P}(\mathrm{X} = x_n)$$

On pose
$$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times \left]\,0\,;+\infty\right[\qquad u_n(x) = x_n \mathbb{1}_{[\,0\,;x_n\,]}(x)\mathbb{P}(\mathrm{X} = x_n)$$

La série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement et donc uniformément sur $]\,0\,;+\infty\,[$ puisqu'on a pour n entier $\|u_n\|_\infty = x_n\mathbb{P}(\mathrm{X} = x_n)$, terme de série convergente du fait de l'espérance finie. Et on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

Ainsi, par double limite, il vient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \to +\infty} u_n(x) = 0$$

autrement dit
$$\mathbb{E}(\mathrm{X}\mathbb{1}_{\mathrm{X} \geqslant x}) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

On conclut
$$\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant x) \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Exercice 5 (****)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(\mathrm{X}_n)_n$ et X des variables aléatoires réelles discrètes telles que

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}(|\mathrm{X}_n - \mathrm{X}| \geqslant \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Pour x point de continuité de $\mathrm{F}_\mathrm{X} : t \mapsto \mathbb{P}(\mathrm{X} \leqslant t)$, montrer que

$$\mathrm{F}_{\mathrm{X}_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{F}_\mathrm{X}(x)$$

Corrigé : Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}_n \leqslant x) = \mathbb{P}(\mathrm{X}_n \leqslant x, |\mathrm{X}_n - \mathrm{X}| < \varepsilon) + \underbrace{\mathbb{P}(\mathrm{X}_n \leqslant x, |\mathrm{X}_n - \mathrm{X}| \geqslant \varepsilon)}_{=\mathrm{o}(1)}$$

Notons $\mathrm{A}_n = \{|\mathrm{X}_n - \mathrm{X}| < \varepsilon\}$. On a donc

$$\mathrm{F}_{\mathrm{X}_n}(x) = \mathbb{P}(\{\mathrm{X}_n \leqslant x\} \cap \mathrm{A}_n) + \mathrm{o}(1)$$

Puis $$\{\mathrm{X}_n \leqslant x, |\mathrm{X}_n - \mathrm{X}| < \varepsilon\} \subset \{\mathrm{X}_n \leqslant x, \mathrm{X} < \mathrm{X}_n + \varepsilon\} \subset \{\mathrm{X} \leqslant x + \varepsilon\}$$

d'où $$\mathrm{F}_{\mathrm{X}_n}(x) \leqslant \mathrm{F}_\mathrm{X}(x+\varepsilon) + \mathrm{o}(1)$$

Comme $\{|\mathrm{X}_n - \mathrm{X}| < \varepsilon\} \subset \{\mathrm{X}_n < \mathrm{X} + \varepsilon\}$, on a également

$$\begin{aligned}\{\mathrm{X} \leqslant x - \varepsilon, |\mathrm{X}_n - \mathrm{X}| < \varepsilon\} &\subset \{\mathrm{X} \leqslant x - \varepsilon, \mathrm{X}_n < \mathrm{X} + \varepsilon, |\mathrm{X}_n - \mathrm{X}| < \varepsilon\} \\ &\subset \{\mathrm{X}_n \leqslant x, |\mathrm{X}_n - \mathrm{X}| < \varepsilon\}\end{aligned}$$

d'où $$\mathbb{P}(\{\mathrm{X} \leqslant x - \varepsilon\} \cap \mathrm{A}_n) \leqslant \mathbb{P}(\{\mathrm{X}_n \leqslant x\} \cap \mathrm{A}_n) = \mathrm{F}_{\mathrm{X}_n}(x) + \mathrm{o}(1)$$

Enfin $$\mathrm{F}_\mathrm{X}(x-\varepsilon) = \mathbb{P}(\{\mathrm{X} \leqslant x - \varepsilon\} \cap \mathrm{A}_n) + \underbrace{\mathbb{P}(\{\mathrm{X} \leqslant x - \varepsilon\} \cap \overline{\mathrm{A}_n})}_{=\mathrm{o}(1)}$$

d'où $$\mathrm{F}_\mathrm{X}(x-\varepsilon) + \mathrm{o}(1) \leqslant \mathrm{F}_{\mathrm{X}_n}(x) \leqslant \mathrm{F}_\mathrm{X}(x+\varepsilon) + \mathrm{o}(1)$$

Soit $\eta > 0$. Par continuité de F_X en x, on peut choisir $\varepsilon > 0$ tel que

$$|\mathrm{F}_\mathrm{X}(x) - \mathrm{F}_\mathrm{X}(x-\varepsilon)| \leqslant \eta \quad \text{et} \quad |\mathrm{F}_\mathrm{X}(x) - \mathrm{F}_\mathrm{X}(x+\varepsilon)| \leqslant \eta$$

Enfin, on choisit N suffisamment grand pour que les termes en $\mathrm{o}(1)$ soient bornés par η pour $n \geqslant \mathrm{N}$. Ainsi, on a trouvé N entier tel que

$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad |\mathrm{F}_{\mathrm{X}_n}(x) - \mathrm{F}_\mathrm{X}(x)| \leqslant 2\eta$$

Ainsi $$\boxed{\text{Pour } x \text{ point de continuité de } \mathrm{F}_\mathrm{X}, \text{ on a } \mathrm{F}_{\mathrm{X}_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{F}_\mathrm{X}(x).}$$

Exercice 6 (****)

Soient $(\mathrm{X}_n)_n$ et X des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2 \qquad p_{k,n} = \mathbb{P}(\mathrm{X}_n = k) \quad \text{et} \quad p_k = \mathbb{P}(\mathrm{X} = k)$$

1. Définir la fonction génératrice G_X et justifier qu'elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[\,0\,;1\,[$.
2. On suppose que $p_{k,n} \xrightarrow[n\to\infty]{} p_k$ pour tout k entier. Montrer que la suite de fonctions $(\mathrm{G}_{\mathrm{X}_n})_n$ converge simplement vers G_X sur $[\,0\,;1\,[$.
3. Étudier la réciproque.

Corrigé : 1. On définit la fonction génératrice de X notée G_X par

$$\boxed{\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad G_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \mathbb{P}(X=n)}$$

La série entière définissant G_X a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1 puisque $0 \leqslant \mathbb{P}(X=k) \leqslant 1$ pour tout k entier. D'après le théorème de dérivation des séries entières, on obtient

$$\boxed{G_X \in \mathscr{C}^\infty([\,0\,;1\,[\,,\mathbb{R})}$$

2. Soit $t \in [\,0\,;1\,[$. On note $u_k : n \mapsto \mathbb{P}(X_n = k)t^k$. On a $u_k(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(X=k)t^k$ et $|u_k(n)| \leqslant t^k$ avec $\sum t^k$ convergente. Ainsi, la série $\sum u_k$ converge normalement donc uniformément et d'après le théorème de double limite, on obtient

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} u_k(n)$$

Ainsi $$\boxed{G_{X_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{CS}} G_X \quad \text{sur} \quad [\,0\,;1\,[}$$

3. Supposons $G_{X_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{CS}} G_X$ sur $[\,0\,;1\,[$. On va utiliser un procédé diagonal sur la suite de suites $\left((p_{k,n})_n\right)_k$. Soit k entier. La suite $(p_{k,n})_n$ est à valeurs dans $[\,0\,;1\,]$. Ainsi, on dispose de φ_1 extractrice telle que

$$p_{1,\varphi_1(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} q_1 \in [\,0\,;1\,]$$

puis de φ_2 extractrice telle que

$$p_{2,\varphi_1\circ\varphi_2(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} q_2 \in [\,0\,;1\,]$$

et en itérant ce procédé, on dispose de φ_k tel que

$$p_{k,\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_k(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} q_k \in [\,0\,;1\,]$$

On pose $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \varphi(n) = \varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_n(n)$$

L'application φ est clairement une extractrice (injection de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante). Pour $n \geqslant k$, on a

$$\varphi(n) = \varphi_1 \circ \ldots \varphi_k(\psi_k(n)) \quad \text{avec} \quad \psi_k(n) = \varphi_{k+1} \circ \ldots \varphi_n(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

Ainsi $$\forall k \in \mathbb{N} \qquad p_{k,\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} q_k$$

On pose $$\forall t \in [\,0\,;1\,[\qquad G(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} q_k t^k$$

La fonction G est bien définie sur $[\,0\,;1\,[$ puisqu'on $0 \leqslant q_k \leqslant 1$ pour tout k entier. D'après le résultat de la deuxième question, on obtient

$$G_{X_{\varphi(n)}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{CS}} G \quad \text{sur} \quad [\,0\,;1\,[$$

Or, la suite de fonctions $\left(G_{X_{\varphi(n)}}\right)_n$ est extraite de la suite $(G_{X_n})_n$ simplement convergente. Par unicité de la limite pour la convergence simple, il s'ensuit $G = G_X$, autrement dit

$$\forall t \in [\,0\,;1\,[\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} q_k t^k = \sum_{n=0}^{+\infty} p_k t^k$$

Par unicité du développement en série entière, il vient

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad q_k = p_k$$

Par récurrence forte sur k, on obtient que la suite bornée $(p_{k,n})_n$ admet p_k pour unique valeur d'adhérence. L'initialisation pour $k = 1$ est vraie puisque $p_1 = q_1$ avec q_1 une valeur d'adhérence de $(p_{1,n})_n$. On suppose le résultat vrai jusqu'au rang $k-1$. Les suite $(p_{1,n})_n$, …, $(p_{k-1,n})_n$ sont bornées avec une unique valeur d'adhérence donc convergentes et on choisit comme extractrice $\varphi_1 = \ldots = \varphi_{k-1} = \mathrm{id}$ et φ_k une extractrice quelconque telle que $(p_{k,\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_k(n)})_n = (p_{k,\varphi_k(n)})_n$ converge. L'hérédité suit et on conclut

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \qquad p_{k,n} \xrightarrow[n\to\infty]{} p_k}$$

Variante : Si on ne pense pas à la diagonale de Cantor, on peut encore aboutir au résultat mais c'est technique. Supposons $\mathrm{G}_{\mathrm{X}_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{CS}} \mathrm{G}_{\mathrm{X}}$ sur $[\,0\,;1\,[$. On va montrer qu'il y a en réalité convergence normale sur tout segment de $[\,0\,;1\,[$ pour $(\mathrm{G}_{\mathrm{X}_n})_n$ et ses dérivées. Soit $a \in\,]\,0\,;1\,[$. Les fonctions $\mathrm{G}_{\mathrm{X}_n}$ et G_{X} sont continues. On peut alors considérer

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \delta_n = \|\mathrm{G}_{\mathrm{X}_n} - \mathrm{G}_{\mathrm{X}}\|_{\infty,[\,0\,;a\,]}$$

Par continuité sur un segment, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \exists t_n \in [\,0\,;a\,] \quad | \quad \delta_n = |\mathrm{G}_{\mathrm{X}_n}(t_n) - \mathrm{G}_{\mathrm{X}}(t_n)|$$

Par compacité de $[\,0\,;a\,]$, il existe φ extractrice telle que $t_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} t^\star \in [\,0\,;a\,]$. Puis, par inégalité triangulaire

$$\delta_n \leqslant \underbrace{|\mathrm{G}_{\mathrm{X}_n}(t_n) - \mathrm{G}_{\mathrm{X}_n}(t^\star)|}_{=\alpha_n} + \underbrace{|\mathrm{G}_{\mathrm{X}_n}(t^\star) - \mathrm{G}_{\mathrm{X}}(t^\star)|}_{=\beta_n} + \underbrace{|\mathrm{G}_{\mathrm{X}}(t^\star) - \mathrm{G}_{\mathrm{X}}(t_n)|}_{=\gamma_n}$$

Par convergence simple, on a $\beta_n = \mathrm{o}(1)$ et par continuité de G_{X}, on a $\gamma_{\varphi(n)} = \mathrm{o}(1)$. Puis, par linéarité du symbole Σ, convergence absolue par convergence de $\sum a^k$ et inégalité triangulaire, il vient

$$\alpha_n = \left|\sum_{k=0}^{+\infty} p_{k,n}(t_n^k - t^{\star k})\right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \left|t_n^k - t^{\star k}\right|$$

En commençant la somme à $k = 1$ et avec l'identité de Bernoulli

$$t_n^k - t^{\star k} = (t_n - t^\star)\sum_{j=0}^{k-1} t_n^j t^{\star k-1-j} \qquad \Longrightarrow \qquad \left|t_n^k - t^{\star k}\right| \leqslant |t_n - t^\star|\, k a^{k-1}$$

La série $\sum\limits_{k\geqslant 1} k a^{k-1}$ converge (série entière dérivée) et par suite

$$\alpha_n \leqslant |t_n - t^\star| \sum_{k=1}^{+\infty} k a^{k-1}$$

d'où $\alpha_{\varphi(n)} = \mathrm{o}(1)$ et par conséquent $\delta_{\varphi(n)} = \mathrm{o}(1)$. Puis, on a

$$\forall t \in [\,0\,;1\,[\qquad 0 \leqslant \mathrm{G}_{\mathrm{X}_n}(t) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} p_{k,n} = 1 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \mathrm{G}_{\mathrm{X}}(t) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$$

d'où

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant \delta_n \leqslant 2$$

La suite $(\delta_n)_n$ est donc à valeurs dans le compact $[\,0\,;2\,]$. Soit ψ une extractrice telle que $\left(\delta_{\psi(n)}\right)_n$ converge. Le résultat précédemment établi sur $(\delta_n)_n$ vaut pour $\left(\delta_{\psi(n)}\right)_n$. Ainsi, il existe φ extractrice telle que $\delta_{\psi\circ\varphi(n)} = \mathrm{o}(1)$. Il s'ensuit que $\delta_{\psi(n)} = \mathrm{o}(1)$ et zéro est donc l'unique valeur d'adhérence de la suite $(\delta_n)_n$. Ainsi, on a $\delta_n = \mathrm{o}(1)$. On procède ensuite par récurrence au rang

ℓ pour établir $\delta_n^{(\ell)} = \mathrm{o}(1)$ avec $\delta_n^{(\ell)} = \|\mathrm{G}_{\mathrm{X}_n}^{(\ell)} - \mathrm{G}_{\mathrm{X}}^{(\ell)}\|_{\infty,[\,0\,;a\,]}$. On suit un schéma de preuve analogue et le seul terme délicat à contrôler est

$$\alpha_n^{(\ell)} = \left|\sum_{k=\ell}^{+\infty} p_{k,n} \frac{\ell!}{(k-\ell)!}\left(t_n^{k-\ell} - t^{\star k-\ell}\right)\right| = \left|\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\ell+k)!}{k!}\left(t_n^{k} - t^{\star k}\right)\right|$$

Toujours avec l'identité de Bernoulli, on obtient

$$\alpha_n^{(\ell)} \leqslant |t_n - t^\star| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\ell+k)!}{k!} k a^{k-1} = |t_n - t^\star| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\ell+1+k)!}{k!} a^k$$

grâce à la converge de la série $\sum \dfrac{(\ell+1+k)!}{k!} a^k$, série entière dérivée à l'ordre $\ell + 1$. L'hérédité s'ensuit. On en déduit

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \frac{\mathrm{G}_{\mathrm{X}_n}^{(k)}(0)}{k!} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\mathrm{G}_{\mathrm{X}}^{(k)}(0)}{k!}$$

Et finalement
$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \qquad p_{k,n} \xrightarrow[n\to\infty]{} p_k}$$