ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°64

Exercice 1 (*)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X variable aléatoire de loi $\mathscr{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Déterminer $\mathbb{P}(\mathrm{X} \text{ pair})$.

Exercice 2 (*)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé et $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ variables aléatoires indépendantes avec $\mathrm{X}_i \sim \mathscr{P}(\lambda_i)$ et les $\lambda_i > 0$. Déterminer, de deux manières différentes, la loi de $\sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$.

Exercice 3 (*)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X variable aléatoire de loi $\mathscr{G}(p)$ avec $p \in \left]0\,;1\right[$. Justifier que $1/\mathrm{X}$ admet une espérance finie puis la calculer.

Exercice 4 (*)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X, Y des variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathscr{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Déterminer $\mathbb{P}(\mathrm{X} = \mathrm{Y})$.

Exercice 5 (*)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe dérivable, $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle telle que X et $f(\mathrm{X})$ sont dans L^1. Montrer

$$f(\mathbb{E}(\mathrm{X})) \leqslant \mathbb{E}(f(\mathrm{X}))$$

Exercice 6 (*)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ des variables aléatoires dans L^2. On note la matrice des covariances $\Sigma = \big(\mathrm{Cov}(\mathrm{X}_i, \mathrm{X}_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Montrer

$$\Sigma \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$$

Exercice 7 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X et Y des variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre $p \in \left]0\,;1\right[$. On note A la matrice aléatoire réelle définie par

$$\forall \omega \in \Omega \qquad \mathrm{A}(\omega) = \begin{pmatrix} \mathrm{X}(\omega) & \mathrm{X}(\omega) \\ -\mathrm{Y}(\omega) & -\mathrm{Y}(\omega) \end{pmatrix}$$

Déterminer $\qquad \mathbb{P}(\mathrm{A} \text{ nilpotente})$

Exercice 8 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathscr{G}(p)$ avec $p \in \,]\,0\,;1\,[$. Déterminer la loi de $\min(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$.

Exercice 9 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X, Y des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer $\qquad \forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{A}^2 \qquad |\mathbb{P}(\mathrm{A}) - \mathbb{P}(\mathrm{B})| \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \bar{\mathrm{B}}) + \mathbb{P}(\bar{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B})$

2. En déduire $\qquad \forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad |\mathrm{G}_\mathrm{X}(t) - \mathrm{G}_\mathrm{Y}(t)| \leqslant 2\mathbb{P}(\mathrm{X} \neq \mathrm{Y})$

Exercice 10 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $\mathrm{X} \in \mathrm{L}^2$ et $\mathrm{Y} = \mathrm{X} - \mathbb{E}(\mathrm{X})$.

1. Établir $\qquad \forall t > 0 \qquad t \leqslant \mathbb{E}\left[(t - \mathrm{Y})\mathbb{1}_{\mathrm{Y}<t}\right]$

2. En déduire $\qquad \forall t > 0 \qquad \mathbb{P}(\mathrm{X} - \mathbb{E}(\mathrm{X}) \geqslant t) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(\mathrm{X})}{\mathbb{V}(\mathrm{X}) + t^2}$

Exercice 11 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé et X variable aléatoire de loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.

1. Rappeler la définition de G_X et préciser son expression sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer l'inégalité
$$\forall t \geqslant 1 \qquad \mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant 2\lambda) \leqslant \exp \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = -2\lambda \ln t + \lambda(t-1)$$
3. En déduire $\qquad \mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant 2\lambda) \leqslant \left(\dfrac{\mathrm{e}}{4}\right)^\lambda$