ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°65

Exercice 1 (***)

Soit $\mathrm{Z} \sim \mathscr{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Déterminer $\mathbb{V}(\mathrm{X})$ où $\mathrm{X} = \mathbb{1}_{3|\mathrm{Z}} \dfrac{\mathrm{Z}}{3}$.

Exercice 2 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}$ et N une variable aléatoire indépendante des X_n à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On pose $$\forall \omega \in \Omega \qquad \mathrm{S}_{\mathrm{N}}(\omega) = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}(\omega)} \mathrm{X}_k(\omega)$$

1. Justifier que S_{N} est une variables aléatoire discrète.
2. Montrer l'égalité $\mathrm{G}_{\mathrm{S}_{\mathrm{N}}} = \mathrm{G}_{\mathrm{N}} \circ \mathrm{G}_{\mathrm{X}_1}$.
3. On suppose X_1 et N d'espérance finie. Montrer que S_{N} est d'espérance finie et préciser $\mathbb{E}(\mathrm{S}_{\mathrm{N}})$ en fonction de $\mathbb{E}(\mathrm{N})$ et $\mathbb{E}(\mathrm{X}_1)$.
4. On suppose que $\mathrm{X}_1 \sim \mathscr{B}(p)$ et $\mathrm{N} \sim \mathscr{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Déterminer la loi de S_{N}.
5. Retrouver le résultat précédent sans passer par les fonctions génératrices.

Exercice 3 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé, $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathscr{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ et $\mathrm{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$. Pour $c > \lambda$, montrer qu'il existe $r \in \left]0\,;1\right[$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant nc) \leqslant r^n$$

Exercice 4 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{U}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[\![1\,; \mathrm{N}]\!]$. Pour n entier non nul, on note

$$\mathrm{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{U}_i \quad \text{et} \quad \mathrm{V}_n = \frac{\mathrm{S}_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \quad \text{avec} \quad m = \mathbb{E}(\mathrm{U}_1) \quad \text{et} \quad \sigma = \sqrt{\mathbb{V}(\mathrm{U}_1)}$$

Pour X une variable aléatoire avec $\mathrm{X}(\Omega)$ fini, on note $\mathrm{M}_{\mathrm{X}}(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}})$ avec t réel.

Montrer $$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{M}_{\mathrm{V}_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}$$

Exercice 5 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{X}_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles discrètes de même loi et d'espérance finie. Montrer

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\operatorname*{Max}_{k\in[\![1\,;\,n]\!]} |\mathrm{X}_k|\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Exercice 6 (***)

Soit $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$ avec $p \in]\,0\,;1\,[$. On note $\mathrm{M}_n = \operatorname{Max}(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$. Déterminer un équivalent simple de $\mathbb{E}(\mathrm{M}_n)$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 7 (***)

On pose
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \ln(k) \mathrm{e}^{-n} \frac{n^k}{k!}$$

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{X}_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi de Poisson $\mathscr{P}(1)$. On note $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k$ pour n entier non nul.

On pose
$$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad f(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Soit n entier non nul. Déterminer la fonction génératrice de S_n puis préciser sa loi.
2. Pour n entier non nul, justifier que $f\left(\dfrac{\mathrm{S}_n}{n}\right)$ est d'espérance finie puis en déduire que u_n est bien défini et déterminer une expression de $\mathbb{E}\left(f\left(\dfrac{\mathrm{S}_n}{n}\right)\right)$ en fonction de u_n.
3. Soit $\eta > 0$. Établir $\qquad \mathbb{P}\left(\left|\dfrac{\mathrm{S}_n}{n} - 1\right| \geqslant \eta\right) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n}\right)$
4. Montrer $\qquad \forall x > 1 \qquad \ln(x)^2 \leqslant 2x$
5. Soit $\varepsilon > 0$ et n entier non nul. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que
$$\left|\mathbb{E}\left(f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)\right) - f(1)\right| \leqslant \varepsilon \mathbb{P}(\mathrm{B}_n) + \mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)\right| \mathbb{1}_{\mathrm{A}_n}\right)$$
avec $\qquad \mathrm{A}_n = \left\{\left|\dfrac{\mathrm{S}_n}{n} - 1\right| \geqslant \eta\right\} \qquad \mathrm{B}_n = \left\{\left|\dfrac{\mathrm{S}_n}{n} - 1\right| < \eta\right\}$
6. En déduire un équivalent simple de u_n pour $n \to +\infty$.

Exercice 8 (****)

Soit $s > 1$ et $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*), \mathbb{P})$ espace probabilisé tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathbb{P}(\{n\}) = \frac{\lambda}{n^s} \quad \text{avec} \quad \lambda \text{ réel}$$

On pose
$$\forall p \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{A}_p = \{n \in \mathbb{N}^* \mid p \text{ divise } n\}$$

et on note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

1. Déterminer la valeur de λ.
2. Montrer que les événements $(\mathrm{A}_p)_{p\in\mathcal{P}}$ sont indépendants.
3. Établir l'égalité $\qquad \zeta(s) = \prod\limits_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \dfrac{1}{p^s}\right)^{-1}$
4. La famille $\left(\dfrac{1}{p}\right)_{p\in\mathcal{P}}$ est-elle sommable ?