ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°66

Exercice 1 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre $p \in]\,0\,;1\,[$ et $\mathrm{Y}_n = \min(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$ pour tout n entier non nul.

1. Déterminer $\mathbb{P}(\mathrm{Y}_n > k)$ pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.
2. En déduire que pour n entier non nul, la variable aléatoire Y_n suit une loi usuelle dont on précisera le paramètre.

Indications : 1. Écrire $\{\mathrm{Y}_n > k\}$ à l'aide des $\{\mathrm{X}_i > k\}$ pour $i \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]$.
2. Écrire $\{\mathrm{Y}_n = k\}$ à l'aide d'événements de la forme $\{\mathrm{Y}_n > k\}$.

Exercice 2 (***)

On effectue une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce donnant pile avec probabilité $p \in]\,0\,;1\,[$ et face avec probabilité $q = 1-p$. On dit que la première série est de longueur $n \geqslant 1$ si les n premiers lancers ont donné le même côté et le $n+1$ l'autre côté. La deuxième série commence au lancer suivant la fin de la première série et se termine (si elle se termine) au lancer précédant un changement de côté. Pour $k \geqslant 1$, on note P_k l'événement pile au k-ième lancer F_k face au k-ième lancer et L_1 et L_2 les longueurs respectives des deux séries.

1. Déterminer la loi de L_1.
2. Justifier que L_1 est d'espérance finie puis la calculer.
3. Déterminer la loi de L_2.
4. Justifier que L_2 est d'espérance finie puis la calculer.
5. Les variables aléatoires L_1 et L_2 sont-elles indépendantes ?

Indications : 2. Utiliser la série entière $\sum nx^n$.
5. Résoudre l'égalité $\mathbb{P}(\mathrm{L}_1 = 1, \mathrm{L}_2 = 1) = \mathbb{P}(\mathrm{L}_1 = 1)\mathbb{P}(\mathrm{L}_2 = 1)$.

Exercice 3 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et Y une variable aléatoire réelle discrète centrée telle que $\mathrm{Y}(\omega) \subset [\,a\,;b\,]$. Montrer

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \ln \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{Y}}) \leqslant \frac{\lambda^2 (b-a)^2}{8}$$

Indications : Poser $\qquad \forall \mathrm{A} \in \mathscr{A} \qquad \mathbb{Q}(\mathrm{A}) = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\mathrm{A}} \dfrac{\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{Y}}}{\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{Y}})}\right)$

et justifier qu'il s'agit d'une probabilité. Puis, établir par dérivation d'une série de fonctions

$$\mathbb{V}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{Y}) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\lambda^2} \ln \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{Y}})$$

Enfin, conclure en majorant finement $\mathbb{V}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{Y})$ avec l'inégalité de Popovicius.

Exercice 4 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle positive d'espérance finie.

Montrer $$\mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant x) \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

On pourra commencer par le cas $\mathrm{X}(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

Indications : Pour le cas $\mathrm{X}(\Omega) \subset \mathbb{N}$, s'inspirer de la démonstration de l'inégalité de Markov. Pour le cas général, considérer $\sum u_n$ avec

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times \left]\, 0\,; +\infty \,\right[\qquad u_n(x) = x_n \mathbb{P}(\mathrm{X} = x_n) \mathbb{1}_{x_n \geqslant x}$$

et procéder par double limite.

Exercice 5 (****)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(\mathrm{X}_n)_n$ et X des variables aléatoires réelles discrètes telles que

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}(|\mathrm{X}_n - \mathrm{X}| \geqslant \varepsilon) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Pour x point de continuité de $\mathrm{F_X} : t \mapsto \mathbb{P}(\mathrm{X} \leqslant t)$, montrer que

$$\mathrm{F}_{\mathrm{X}_n}(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathrm{F_X}(x)$$

Indications : Pour $\varepsilon > 0$, utiliser le système complet $(\{|\mathrm{X}_n - \mathrm{X}| < \varepsilon\}, \{|\mathrm{X}_n - \mathrm{X}| \geqslant \varepsilon\})$. Établir l'encadrement

$$\mathrm{F_X}(x - \varepsilon) + \mathrm{o}(1) \leqslant \mathrm{F}_{\mathrm{X}_n}(x) \leqslant \mathrm{F_X}(x + \varepsilon) + \mathrm{o}(1)$$

puis conclure par continuité de $\mathrm{F_X}$ en x.

Exercice 6 (****)

Soient $(\mathrm{X}_n)_n$ et X des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note

$$\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2 \qquad p_{k,n} = \mathbb{P}(\mathrm{X}_n = k) \quad \text{et} \quad p_k = \mathbb{P}(\mathrm{X} = k)$$

1. Définir la fonction génératrice $\mathrm{G_X}$ et justifier qu'elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[\,0\,; 1\,[$.
2. On suppose que $p_{k,n} \xrightarrow[n \to \infty]{} p_k$ pour tout k entier. Montrer que la suite de fonctions $(\mathrm{G}_{\mathrm{X}_n})_n$ converge simplement vers $\mathrm{G_X}$ sur $[\,0\,; 1\,[$.
3. Étudier la réciproque.

Indications : 1. Invoquer un résultat de séries entières.
2. Procéder par double limite.
3. Mettre en œuvre un procédé diagonal sur la suite de suites $\big((p_{k,n})_n\big)_k$ puis utiliser le résultat de la question précédente.