Feuille d'exercices n°58

Exercice 1 (*)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Que vaut $\langle \mathrm{AX}, \mathrm{X}\rangle$ pour $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$?

Corrigé : Soit $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Par symétrie du produit scalaire, on a

$$\langle \mathrm{AX}, \mathrm{X}\rangle = \langle \mathrm{X}, \mathrm{AX}\rangle = \mathrm{X}^\top \mathrm{AX}$$

puis

$$\langle \mathrm{AX}, \mathrm{X}\rangle = (\mathrm{AX})^\top \mathrm{X} = \mathrm{X}^\top \mathrm{A}^\top \mathrm{X} = -\mathrm{X}^\top \mathrm{AX}$$

Ainsi

$$\boxed{\mathrm{A} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \quad \Longrightarrow \quad \forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \qquad \langle \mathrm{AX}, \mathrm{X}\rangle = 0}$$

Exercice 2 (*)

Montrer que le théorème spectral est une équivalence, à savoir pour $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ avec E euclidien

$$u \in \mathscr{S}(\mathrm{E}) \iff \text{il existe une base orthonormée de vecteurs propres de } u$$

Corrigé : Le sens direct est un résultat du cours. Réciproquement, s'il existe une base $\mathscr{B}$ orthonormée de vecteurs propres de u, alors $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u$ est diagonale et donc en particulier symétrique réelle ce qui prouve que $u \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$. On conclut

$$\boxed{\text{Le théorème spectral est une équivalence.}}$$

Exercice 3 (*)

Déterminer $u \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$ vérifiant $\langle u(x), x\rangle = 0$ pour tout $x \in \mathrm{E}$.

Corrigé : Soit x vecteur propre de u associé à la valeur propre λ. On a

$$\langle u(x), x\rangle = \lambda \underbrace{\|x\|^2}_{\neq 0} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 0$$

D'après le théorème spectral, l'endomorphisme u est diagonalisable avec 0 comme unique valeur propre. On conclut

$$\boxed{u = 0}$$

Variante : Soit $(x, y) \in \mathrm{E}^2$. On a

$$\langle u(x+y), x+y\rangle = \underbrace{\langle u(x), x\rangle}_{=0} + \langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle + \underbrace{\langle u(y), y\rangle}_{=0} \underbrace{=}_{u \in \mathscr{S}(\mathrm{E})} 2\,\langle u(x), y\rangle = 0$$

Ceci prouve que $u(x) \in \mathrm{E}^\perp = \{0_\mathrm{E}\}$ pour tout $x \in \mathrm{E}$ d'où la nullité de u. Cette variante élémentaire ne nécessite pas l'usage du théorème spectral.

Exercice 4 (*)

Soit E euclidien et $u \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$. Établir l'égalité $\mathrm{E} = \mathrm{Im}\ u \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}\ u$.

Corrigé : Soit $(y, x) \in \mathrm{Im}\ u \times \mathrm{Ker}\ u$. Il existe $t \in \mathrm{E}$ tel que $y = u(t)$. Puis, comme u est un endomorphisme auto-adjoint, il vient

$$\langle y, x\rangle = \langle u(t), x\rangle = \langle t, u(x)\rangle = \langle t, 0_{\mathrm{E}}\rangle = 0$$

On a donc $\mathrm{Im}\ u \perp \mathrm{Ker}\ u$ et d'après le théorème du rang, on sait $\dim \mathrm{E} = \mathrm{rg}\ u + \dim \mathrm{Ker}\ u$. Ainsi, le noyau et l'image sont supplémentaires et orthogonaux et on conclut

$$\boxed{\mathrm{E} = \mathrm{Im}\ u \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}\ u}$$

Variante : On a

$$x \in \mathrm{Ker}\ u \iff \forall y \in \mathrm{E} \quad \langle u(x), y\rangle = 0 \iff \forall y \in \mathrm{E} \quad \langle x, u(y)\rangle = 0 \iff x \in (\mathrm{Im}\ u)^{\perp}$$

Et comme le sev $\mathrm{Im}\ u$ est de dimension finie, on a $\mathrm{E} = \mathrm{Im}\ u \overset{\perp}{\oplus} (\mathrm{Im}\ u)^{\perp}$ et le résultat suit.

Exercice 5 (*)

Déterminer les matrices $\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{M}^3 + \mathrm{M}^2 + \mathrm{M} = 0$.

Corrigé : D'après le théorème spectral, la matrice M est ortho-diagonalisable. En particulier, le spectre de M est non vide et inclus dans $\mathbb{R}$. Le polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{X}^3 + \mathrm{X}^2 + \mathrm{X} = \mathrm{X}(\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1)$ admet zéro pour unique racine réelle d'où $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{M}) \subset \{0\}$ et donc $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{M}) = \{0\}$. Ainsi, la matrice M est semblable à la matrice nulle et on conclut

$$\boxed{\text{La matrice nulle est l'unique solution.}}$$

Exercice 6 (*)

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ avec E euclidien. Montrer

$$u \in \mathscr{S}(\mathrm{E}) \cap \mathcal{O}(\mathrm{E}) \iff u \text{ symétrie orthogonale}$$

Corrigé : Soit $x \in \mathrm{E}$. Si $u \in \mathscr{S}(\mathrm{E}) \cap \mathcal{O}(\mathrm{E})$, on a

$$u = u^* \quad \text{et} \quad u^* = u^{-1}$$

d'où $u^2 = \mathrm{id}$ et u isométrie. C'est donc une symétrique orthogonale. Réciproquement , si u est une symétrie orthogonale, alors c'est une isométrie et comme $u^2 = \mathrm{id}$, alors $u^{-1} = u$ et $u^{-1} = u^*$ car $u \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ d'où $u \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$. On conclut

$$\boxed{u \in \mathscr{S}(\mathrm{E}) \cap \mathcal{O}(\mathrm{E}) \iff u \text{ symétrie orthogonale}}$$

Variantes : (1) Si on ne pense pas à utiliser l'adjoint, on peut procéder ainsi : pour $u \in \mathscr{S}(\mathrm{E}) \cap \mathcal{O}(\mathrm{E})$, on a

$$\|u^2(x) - x\|^2 = \|u^2(x)\|^2 - 2\,\langle u^2(x), x\rangle + \|x\| = 2\|x\|^2 - 2\,\langle u(x), u(x)\rangle = 0$$

d'où $u^2 = \mathrm{id}$ et u isométrie donc c'est une symétrique orthogonale. Réciproquement , si u est une symétrie orthogonale, alors c'est une isométrie et pour $(x, y) \in \mathrm{E}^2$

$$\langle u(x), y\rangle \underbrace{=}_{u \in \mathcal{O}(\mathrm{E})} \langle u^2(x), u(y)\rangle = \langle x, u(y)\rangle$$

(2) Pour le sens direct, soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E. On a $\mathrm{A} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, la matrice A est ortho-diagonalisable et comme elle est orthogonale, son spectre est inclus dans $\{-1, 1\}$. Il s'agit donc d'une matrice de symétrie qui est une isométrie d'où le résultat. Réciproguement, on considère une base $\mathscr{B}$ orthonormée adaptée à la symétrie s. On a $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} s = \mathrm{diag}(\mathrm{I}_s, -\mathrm{I}_r)$ matrice symétrique réelle et clairement orthogonale d'où le résultat.

Exercice 7 (*)

Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathrm{M}^\top \mathrm{M} = \mathrm{M}$. Caractériser M.

Corrigé : On a clairement M symétrique d'où $\mathrm{M}^2 = \mathrm{M}$. La matrice M est, dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ orthonormée pour le produit scalaire canonique, la matrice d'un projecteur qui est symétrique. C'est donc la matrice d'un projecteur orthogonal dans une base orthonormée. La réciproque est immédiate. On conclut

$$\boxed{\text{Une matrice M vérifiant } \mathrm{M}^\top \mathrm{M} = \mathrm{M} \text{ est la matrice d'un projecteur orthogonal dans une base orthonormée.}}$$

Exercice 8 (**)

Soit E euclidien et p, q des projecteurs orthogonaux. Montrer

$$p \circ q = 0 \iff q \circ p = 0$$

Corrigé : Soit $(x, y) \in \mathrm{E}^2$. On a p, q dans $\mathscr{S}(\mathrm{E})$ d'où

$$\langle p \circ q(x), y\rangle = \langle q(x), p(y)\rangle = \langle x, q \circ p(y)\rangle$$

Il s'ensuit $\boxed{p \circ q = 0 \iff q \circ p = 0}$

Remarque : Si E est seulement préhilbertien, le résultat vaut encore. Comme p et q sont projecteurs orthogonaux, on a

$$\mathrm{E} = \mathrm{Im}\, p \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}\, p \quad \text{et} \quad \mathrm{E} = \mathrm{Im}\, q \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}\, q$$

Puis $\qquad p \circ q = 0 \iff \mathrm{Im}\, q \subset \mathrm{Ker}\, p \implies \mathrm{Ker}\, p^\perp \subset \mathrm{Im}\, q^\perp$

D'où $\qquad p \circ q = 0 \implies \mathrm{Im}\, p \subset \mathrm{Ker}\, q \implies q \circ p = 0$

L'autre sens vient par symétrie des rôles et on conclut

$$\boxed{p \circ q = 0 \iff q \circ p = 0}$$

Exercice 9 (**)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A} = \mathrm{S}^2$ puis montrer qu'on peut choisir $\mathrm{S} \in \mathbb{R}[\mathrm{A}]$.

Corrigé : D'après le théorème spectral, il existe $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec les λ_i positifs tels que $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^\top$. Posant $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$ puis $\mathrm{S} = \mathrm{P}\Delta\mathrm{P}^\top$, on a $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S}^2 = \mathrm{A}$. Notons $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{D}) = \{\mu_1, \ldots, \mu_d\}$ avec $d \leqslant n$ et les μ_i deux à deux distincts. On note $(\mathrm{L}_i)_{i \in [\![1\,;\, d]\!]}$ la famille de polynômes de Lagrange associés aux μ_i et on pose $\mathrm{R} = \sum_{i=1}^{d} \sqrt{\mu_i} \mathrm{L}_i$. Ainsi, on a $\mathrm{R}(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$ pour tout $i \in [\![1\,;\, n]\!]$ et par suite

$$\mathrm{R(A) = R(PDP^\top) = PR(D)P^\top = P\Delta P^\top = S}$$

Ainsi $$\boxed{\exists \mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) \cap \mathbb{R}[\mathrm{A}] \quad | \quad \mathrm{A} = \mathrm{S}^2}$$

Exercice 10 (**)

Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Pour $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, calculer $\mathrm{X^\top MX}$.
2. Montrer qu'il existe une unique matrice symétrique $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ telle que
$$\forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \qquad \mathrm{X^\top MX = X^\top SX}$$
Préciser S en fonction de M.
3. Montrer $\qquad \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(\mathrm{M}) \subset [\min \mathrm{Sp}\,(\mathrm{S})\,;\max \mathrm{Sp}\,(\mathrm{S})\,]$

Corrigé : 1. Tous calculs effectués, on trouve

$$\boxed{\forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \qquad \mathrm{X^\top MX} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{i,j} x_i x_j}$$

2. Par analyse-synthèse, on établit qu'il existe un unique couple $(\mathrm{A}, \mathrm{S}) \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{M = A + S}$. Soit $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On vérifie sans difficulté que $\mathrm{X^\top AX} = 0$ puis
$$\mathrm{X^\top MX = X^\top AX + X^\top SX = X^\top SX}$$
Supposons qu'il existe une autre matrice $\Sigma \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant cette égalité. La matrice $\mathrm{S} - \Sigma$ est symétrique réelle donc ortho-diagonalisable et pour $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \smallsetminus \{0\}$ tel que $(\mathrm{S} - \Sigma)\mathrm{X} = \lambda \mathrm{X}$, il vient
$$\forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \qquad 0 = \mathrm{X}^\top(\mathrm{S} - \Sigma)\mathrm{X} = \lambda \|\mathrm{X}\|^2 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 0$$
La matrice $\mathrm{S} - \Sigma$ est donc semblable à la matrice nulle ce qui prouve l'unicité. Enfin, l'analyse-synthèse permet d'obtenir la partie symétrique de M avec $\mathrm{S} = \dfrac{1}{2}(\mathrm{M} + \mathrm{M}^\top)$. On conclut

$$\boxed{\text{La partie symétrique S de M est l'unique matrice symétrique vérifiant la condition demandée.}}$$

Variante : Posons $\qquad \forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \qquad q(\mathrm{X}) = \mathrm{X^\top MX}$

et $\qquad \forall (\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2 \qquad \varphi(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \dfrac{1}{2}\,[q(\mathrm{X} + \mathrm{Y}) - q(\mathrm{X}) - q(\mathrm{Y})]$

On dit que q est une *forme quadratique* et φ une *forme bilinéaire symétrique* appelée *forme polaire* associée à la forme quadratique q. On pose également
$$\forall (i,j) \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!]^2 \qquad s_{i,j} = \varphi(\mathrm{E}_i, \mathrm{E}_j)$$
La matrice $\mathrm{S} = \big(s_{i,j}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est symétrique réelle et vérifie $\mathrm{X^\top SX = X^\top MX}$ pour tout $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Par ailleurs, la matrice S est déterminée de manière unique par l'application φ : si S vérifie les conditions imposées, alors $\varphi(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \mathrm{X^\top SY}$ pour tout $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$. Et la forme bilinéaire φ est elle-même déterminée par la forme quadratique q ce qui prouve son unicité et donc celle de S. Cette approche ne requiert pas l'utilisation du théorème spectral.

3. Soit $\mathrm{P} \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{S = PDP^\top}$. On suppose $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$. Soit $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ normé, vecteur propre associé à λ réel et $\mathrm{X = PY}$. La colonne Y est également normée puisque la matrice P est une matrice d'isométrie. Il vient

$$\mathrm{X}^\top\mathrm{M}\mathrm{X}=\lambda\|\mathrm{X}\|^2=\lambda\quad\text{et}\quad \mathrm{X}^\top\mathrm{M}\mathrm{X}=\mathrm{Y}^\top\mathrm{D}\mathrm{Y}=\sum_{i=1}^n\lambda_i y_i^2$$

On conclut $$\boxed{\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(\mathrm{M})\subset[\,\min\mathrm{Sp}\,(\mathrm{S})\,;\max\mathrm{Sp}\,(\mathrm{S})\,]}$$

Exercice 11 (**)

Soit $\mathrm{E}=\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ muni du produit scalaire $\langle \mathrm{P},\mathrm{Q}\rangle=\displaystyle\int_{-1}^1 \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t$ pour $(\mathrm{P},\mathrm{Q})\in\mathrm{E}^2$ .On pose

$$\forall \mathrm{P}\in\mathrm{E}\qquad \varphi(\mathrm{P})=(\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}''+2\mathrm{X}\mathrm{P}'$$

Montrer que $\varphi\in\mathscr{S}(\mathrm{E})$.

Corrigé : L'application φ est linéaire par linéarité de la dérivation et du produit à gauche et à valeurs dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Pour $\mathrm{P}\in\mathrm{E}$, on a $\deg\mathrm{P}\leqslant n$ d'où $\deg\mathrm{P}'\leqslant n-1$, $\deg\mathrm{P}''\leqslant n-2$ et par conséquent

$$\deg\varphi(\mathrm{P})=\max(\deg(\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}'',\deg 2\mathrm{X}\mathrm{P}')\leqslant n$$

ce qui prouve que $\varphi\in\mathscr{L}(\mathrm{E})$. Soit $(\mathrm{P},\mathrm{Q})\in\mathrm{E}^2$. En intégrant par parties, il vient

$$\begin{aligned}\langle\varphi(\mathrm{P}),\mathrm{Q}\rangle&=\int_{-1}^1\left[(t^2-1)\mathrm{P}''(t)+2t\mathrm{P}'(t)\right]\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t\\&=\left[(t^2-1)\mathrm{P}'(t)\mathrm{Q}(t)\right]_{-1}^1-\int_{-1}^1(t^2-1)\mathrm{P}'(t)\mathrm{Q}'(t)\,\mathrm{d}t=-\int_{-1}^1(t^2-1)\mathrm{P}'(t)\mathrm{Q}'(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

L'expression est symétrique en P et Q et on conclut

$$\boxed{\varphi\in\mathscr{S}(\mathrm{E})}$$

Exercice 12 (**)

Soit $\mathrm{A}\in\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer $$\det(\mathrm{A})^{1/n}\leqslant\frac{1}{n}\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})$$

Corrigé : D'après le théorème spectral, la matrice A est orthogonalement semblable à $\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$. Comme $\mathrm{A}\in\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, on a les $\lambda_i\geqslant 0$. La trace et le déterminant étant invariants par similitude, on a

$$\det(\mathrm{A})=\prod_{i=1}^n\lambda_i\quad\text{et}\quad\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})=\sum_{i=1}^n\lambda_i$$

Si les λ_i sont strictement positifs, il vient, d'après l'inégalité de Jensen appliquée à la fonction concave $x\mapsto\ln x$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\ln(\lambda_i)=\ln\left(\left(\prod_{i=1}^n\lambda_i\right)^{1/n}\right)\leqslant\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\lambda_i\right)$$

Ainsi $$\left(\prod_{i=1}^n\lambda_i\right)^{1/n}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\lambda_i$$

L'inégalité (fameuse, c'est l'inégalité *arithmético-géométrique*) vaut toujours si les λ_i sont positifs largement. On conclut

$$\boxed{\det(\mathrm{A})^{1/n}\leqslant\frac{1}{n}\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})}$$

Exercice 13 (**)

Montrer
$$\left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

Corrigé : Notons $\mathrm{H}_n = \left(\dfrac{1}{i+j-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la *matrice de Hilbert* d'ordre n. On remarque
$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2 \qquad \frac{1}{i+j-1} = \int_0^1 t^{i+j-2}\,\mathrm{d}t$$

Posons $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ muni du produit scalaire $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \mapsto \displaystyle\int_0^1 \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t$ (à vérifier !). On a
$$\mathrm{H}_n = \left(\langle \mathrm{X}^i, \mathrm{X}^j\rangle\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

La matrice de Hilbert H_n est donc un cas particulier de matrice de Gram. Pour $\mathrm{U} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on trouve
$$\mathrm{U}^\top \mathrm{H}_n \mathrm{U} = \|\sum_{i=1}^n u_i \mathrm{X}^i\|^2 \geqslant 0$$

Puis
$$\mathrm{U}^\top \mathrm{H}_n \mathrm{U} = 0 \iff \|\sum_{i=1}^n u_i \mathrm{X}^i\|^2 = 0 \iff \sum_{i=1}^n u_i \mathrm{X}^i = 0 \iff \mathrm{U} = 0$$

Ainsi
$$\forall \mathrm{U} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \qquad \mathrm{U}^\top \mathrm{H}_n \mathrm{U} > 0$$

On conclut
$$\boxed{\left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})}$$

Exercice 14 (**)

Déterminer a et b réels non nuls tels que $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ puis décrire l'isométrie associée dans $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté.

Corrigé : Une matrice est dans $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ si et seulement si ses colonnes (ou lignes) forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. On trouve
$$\mathrm{A} \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R}) \iff \begin{cases} a^2 + 2b^2 = 1 \\ b^2 + 2ab = 0 \end{cases}$$

D'où
$$\boxed{\mathrm{A} \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R}) \iff (a,b) \in \left\{(1,0), (-1,0), \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right\}}$$

Comme $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_3(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{A} \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R}) \cap \mathscr{S}_3(\mathbb{R})$. Par conséquent, la matrice A est orthogonalement semblable à $\mathrm{diag}(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ d'après le théorème spectral et par localisation du spectre d'une matrice orthogonale. Un simple calcul de trace permet donc de savoir dans quelle configuration on se trouve. Pour $(a,b) = \left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)$, on a A semblable à $\mathrm{diag}(1,-1,-1)$ matrice d'un demi-tour d'axe $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{A} - \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}\,(1,1,1)$ et pour $(a,b) = \left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$, on trouve A semblable à

$\mathrm{diag}(1,1,-1)$ matrice de la réflexion par rapport à $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{A}-\mathrm{I}_n)$ d'équation $x+y+z=0$. Ainsi, notant $u=(1,1,1)$, on conclut

$$\boxed{\mathrm{A}\in\mathcal{O}_3(\mathbb{R}) \iff \mathrm{A}=\mathrm{mat}_{\mathscr{C}} f \quad \text{avec} \quad f\in\left\{\pm\,\mathrm{id}\,,\mathrm{rot}(u,\pi),s_{\mathrm{Vect}\,(u)^\perp}\right\}}$$

Exercice 15 (**)

Soit $\mathrm{U}\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$. On pose $\mathrm{M}=\mathrm{U}\mathrm{U}^\top$. Montrer que M est diagonalisable puis préciser ses éléments propres.

Corrigé : On a
$$\mathrm{M}^\top=\left(\mathrm{U}\mathrm{U}^\top\right)^\top=\mathrm{U}\mathrm{U}^\top=\mathrm{M}$$

$$\boxed{\text{D'après le théorème spectral, la matrice M symétrique réelle est diagonalisable.}}$$

Munissons $\mathrm{E}=\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique $\langle\mathrm{X},\mathrm{Y}\rangle=\mathrm{X}^\top\mathrm{Y}$ pour $(\mathrm{X},\mathrm{Y})\in\mathrm{E}^2$. Pour $\mathrm{X}\in\mathrm{E}$, on a $\mathrm{MX}=\mathrm{U}\,\langle\mathrm{U},\mathrm{X}\rangle$ d'où

$$\mathrm{X}\in\mathrm{Ker}\;\mathrm{M}\iff\mathrm{X}\in\mathrm{Vect}\,(\mathrm{U})^\perp\quad\text{et}\quad\mathrm{MU}=\|\mathrm{U}\|^2\mathrm{U}$$

ce qui prouve

$$\{0,\|\mathrm{U}\|^2\}\subset\mathrm{Sp}\,(\mathrm{M})\quad\text{et}\quad\mathrm{E}_0(\mathrm{M})=\mathrm{Vect}\,(\mathrm{U})^\perp\qquad\mathrm{Vect}\,(\mathrm{U})\subset\mathrm{E}_{\|\mathrm{U}\|^2}(\mathrm{M})$$

Comme l'espace propre $\mathrm{E}_0(\mathrm{M})$ est un hyperplan, pour raison de dimension, on conclut

$$\boxed{\mathrm{Sp}\,(\mathrm{M})=\{0,\|\mathrm{U}\|^2\}\quad\text{et}\quad\mathrm{E}_0(\mathrm{M})=\mathrm{Vect}\,(\mathrm{U})^\perp\quad\mathrm{E}_{\|\mathrm{U}\|^2}(\mathrm{M})=\mathrm{Vect}\,(\mathrm{U})}$$

Remarque : Notant $\alpha=\|\mathrm{U}\|^2$, on obtient par associativité du produit matriciel

$$\mathrm{M}^2=\mathrm{U}(\mathrm{U}^\top\mathrm{U})\mathrm{U}^\top=\alpha\mathrm{M}$$

Comme $\mathrm{X}(\mathrm{X}-\alpha)$ est annulateur de M, on en déduit la localisation du spectre $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{M})\subset\{0,\alpha\}$ ce qui oriente ensuite la rédaction vers la détermination de Ker M comme ci-avant.

Exercice 16 (**)

Soit E euclidien et $u\in\mathscr{S}(\mathrm{E})$ tel que $\mathrm{Tr}\,(u)=0$.

1. Montrer qu'il existe $x\in\mathrm{E}\setminus\{0\}$ tel que $u(x)\perp x$.
2. En déduire l'existence d'une base orthonormée $(e_i)_{i\in[\![1\,;\,n]\!]}$ de E telle que $\langle u(e_i),e_i\rangle=0$ pour tout $i\in[\![1\,;\,n]\!]$.

Corrigé : 1. Soit $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de u. Avec $x=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i$ (non nul car les ε_i sont libres), il vient

$$\langle u(x),x\rangle=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\langle u(\varepsilon_i),\varepsilon_j\rangle=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\lambda_i\underbrace{\langle\varepsilon_i,\varepsilon_j\rangle}_{=\delta_{i,j}}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\mathrm{Tr}\,(u)=0$$

Ainsi
$$\boxed{\exists x\in\mathrm{E}\setminus\{0\}\quad|\quad u(x)\perp x}$$

2. D'après le résultat précédent, il existe e_1 que l'on peut normer tel que $u(e_1)\perp e_1$. Soit p le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}\,(e_1)^\perp$. L'application $p\circ u_{|\mathrm{Vect}\,(e_1)^\perp}$ induit un endomorphisme $v\in\mathscr{L}(\mathrm{Vect}\,(e_1)^\perp)$. On vérifie sans difficulté que

$$\forall(x,y)\in\left(\mathrm{Vect}\,(e_1)^\perp\right)^2\qquad\langle v(x),y\rangle=\langle x,v(y)\rangle$$

et on a $\text{Tr } u = \text{Tr } v = 0$ puisque $\langle u(e_1), e_1\rangle = 0$. On peut aussi voir les choses matriciellement. Dans une base $\mathscr{B} = (e_1, \mathscr{L})$ orthonormée adaptée à la décomposition $\text{E} = \text{Vect}\,(e_1) \overset{\perp}{\oplus} \text{Vect}\,(e_1)^\perp$, on a

$$\text{A} = \text{mat}_{\mathscr{B}} u = \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline * & \text{B} \end{array}\right) \quad \text{avec} \quad \text{B} = \text{mat}_{\mathscr{L}} v$$

Comme la matrice A est symétrique réelle de trace nulle, il en est de même pour la matrice B que l'on peut interpréter comme matrice d'un endomorphisme de $\text{Vect}\,(e_1)^\perp$ auto-adjoint et de trace nulle. Par récurrence sur la dimension, on peut donc conclure

$$\boxed{\exists (e_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]} \text{ base orthonormée de E} \quad | \quad \forall i \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad \langle u(e_i), e_i\rangle = 0}$$