ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°59

Exercice 1 (**)

Soit E euclidien et $u \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$. Montrer

$$\operatorname*{Sup}_{\|x\|=1} \|u(x)\| = \operatorname*{Sup}_{\|x\|=1} |\langle u(x), x\rangle| = \max\{|\lambda|, \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\}$$

Corrigé : D'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de vecteurs propres de u associés aux valeurs propres $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Soit $i_0 \in [\![1\,;n]\!]$ tel que $|\lambda_{i_0}| = \max\{|\lambda|, \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\}$. Pour $x \in \mathrm{S}(0,1)$, on a

$$|\langle u(x), x\rangle| = \left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2\right| \leqslant |\lambda_{i_0}| \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = |\lambda_{i_0}| \quad \text{et} \quad |\langle u(e_{i_0}), e_{i_0}\rangle| = |\lambda_{i_0}|$$

d'où
$$\operatorname*{Sup}_{\|x\|=1} |\langle u(x), x\rangle| = \max\{|\lambda|, \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\}$$

Puis
$$\|u(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 x_i^2 \leqslant \lambda_{i_0}^2 \|x\|^2 = \lambda_{i_0}^2 \quad \text{et} \quad \|u(e_{i_0})\| = |\lambda_{i_0}|$$

On conclut
$$\boxed{\operatorname*{Sup}_{\|x\|=1} \|u(x)\| = \operatorname*{Sup}_{\|x\|=1} |\langle u(x), x\rangle| = \max\{|\lambda|, \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\}}$$

Exercice 2 (***)

Soit E euclidien et $f \in \mathscr{S}^+(\mathrm{E})$. Montrer qu'il existe un unique $g \in \mathscr{S}^+(\mathrm{E})$ tel que $f = g^2$.

Corrigé : Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de diagonalisation de f (une telle base existe d'après le théorème spectral). On a $f(e_i) = \lambda_i e_i$ pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$ avec $\lambda_i \geqslant 0$. On définit $g \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ par $g(e_i) = \sqrt{\lambda_i} e_i$ pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$. On a f et g^2 qui coïncident sur une base d'où $f = g^2$ et $g \in \mathscr{S}^+(\mathrm{E})$ puisque $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} g \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrons l'unicité d'un tel endomorphisme. Soit $h \in \mathscr{S}^+(\mathrm{E})$ tel que $f = h^2$. Comme f est un polynôme en h, alors f et h commutent. Par suite, les sous-espaces propres de f sont stables par h. Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, on note E_λ le sous-espace propre de f pour la valeur propre λ et h_λ l'endomorphisme induit par h sur E_λ. On a clairement $h_\lambda \in \mathscr{S}^+(\mathrm{E}_\lambda)$ et $h_\lambda^2 = \lambda\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}_\lambda}$ d'où $(\mathrm{X}^2 - \lambda)$ annulateur de h_λ. D'après le théorème spectral, l'endomorphisme h_λ est diagonalisable avec $\sqrt{\lambda}$ comme unique valeur propre possible (car $-\sqrt{\lambda} \leqslant 0$) ce qui prouve que $h_\lambda = \sqrt{\lambda}\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}_\lambda}$. Comme $\mathrm{E} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \mathrm{E}_\lambda$, l'endomorphisme h est donc caractérisé et on conclut

$$\boxed{\forall f \in \mathscr{S}^+(\mathrm{E}) \qquad \exists! g \in \mathscr{S}^+(\mathrm{E}) \quad | \quad f = g^2}$$

Remarque : On peut établir $g \in \mathbb{R}[f]$ et comme h et f commutent, alors h et g commutent et sont donc diagonalisables dans une même base. Pour x un vecteur de cette base, on a $h(x) = \lambda x$ et $g(x) = \mu x$ avec λ, $\mu \geqslant 0$. Avec l'égalité $h^2(x) = f(x) = g^2(x)$, il s'ensuit $\lambda^2 = \mu^2$ d'où $\lambda = \mu$ et les endomorphismes h et g coïncident donc sur cette base d'où l'unicité. Cet argument est moins efficace que celui présenté ci-avant puisqu'il s'appuie notamment sur la diagonalisation simultanée (à refaire).

Exercice 3 (***)

Pour $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{B} = \sqrt{\mathrm{A}}$ l'unique matrice $\mathrm{B} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ solution de $\mathrm{B}^2 = \mathrm{A}$. Montrer la continuité de cette application $\sqrt{\cdot}$.

Corrigé : On munit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique. Soit $(\mathrm{A}_k)_k \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que $\mathrm{A}_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{A}$. Pour tout k entier, il existe une unique matrice $\mathrm{B}_k \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{B}_k^2 = \mathrm{A}_k$. Il vient

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \|\mathrm{B}_k\|^2 = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{B}_k{}^\top \mathrm{B}_k) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{B}_k^2) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}_k)$$

Or, l'application Tr est linéaire donc continue sur l'espace E de dimension finie. Par conséquent, on a $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})$ et cette suite est donc bornée. Il en résulte que la suite $(\mathrm{B}_k)_k$ est bornée. Soit φ une extractrice telle que $\mathrm{B}_{\varphi(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{B}$. La matrice B est dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ par fermeture de cet ensemble (voir décomposition de Cartan). Par continuité du produit matriciel, on a

$$\mathrm{A}_{\varphi(k)} = \mathrm{B}_{\varphi(k)}^2 \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{B}^2 = \mathrm{A}$$

Ainsi, la suite $(\mathrm{B}_k)_k$ est bornée et admet $\mathrm{B} = \sqrt{\mathrm{A}}$ pour unique valeur d'adhérence dans E espace de dimension finie. Il en résulte que $\mathrm{B}_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{B}$ et on conclut

$$\boxed{\text{L'application } \sqrt{\cdot} \text{ est continue sur } \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}).}$$

Exercice 4 (***)

Soit $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et φ définie sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ par

$$\forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \qquad \varphi(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^\top \mathrm{S}\mathrm{X} - 2\mathrm{X}^\top \mathrm{B}$$

Montrer que φ admet un minimum et préciser où il est atteint.

Corrigé : Soit $\Delta \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{S} = \Delta^2$. On a $\Delta \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ puisque $\det(\Delta)^2 = \det \mathrm{S} > 0$. Pour X et C dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, en pensant à un début de « carré », on observe que

$$\|\Delta\mathrm{X} - \mathrm{C}\|^2 = \mathrm{X}^\top \Delta^2 \mathrm{X} - 2\,\langle \Delta\mathrm{X}, \mathrm{C}\rangle + \|\mathrm{C}\|^2 = \mathrm{X}^\top \mathrm{S}\mathrm{X} - 2\mathrm{X}^\top \Delta\mathrm{C} + \|\mathrm{C}\|^2$$

On pose alors $\mathrm{C} = \Delta^{-1}\mathrm{B}$. Il vient

$$\forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \qquad \varphi(\mathrm{X}) = \|\Delta\mathrm{X} - \Delta^{-1}\mathrm{B}\|^2 - \|\mathrm{B}\|^2$$

$$\text{et} \qquad \|\Delta\mathrm{X} - \Delta^{-1}\mathrm{B}\|^2 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \|\Delta\mathrm{X} - \Delta^{-1}\mathrm{B}\|^2 = 0 \iff \Delta\mathrm{X} = \Delta^{-1}\mathrm{B} \iff \mathrm{X} = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{B}$$

Ainsi $\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ admet un minimum atteint en } \mathrm{S}^{-1}\mathrm{B}.}$

Exercice 5 (***)

Soit E euclidien de dimension n, $(u_1, \ldots, u_n) \in \mathrm{E}^n$ et $\mathrm{G} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\mathrm{G} = \big(\langle u_i, u_j\rangle\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

1. Montrer que $\mathrm{G} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.
2. Application : Montrer qu'il existe $(v_1, \ldots, v_n)$ famille de vecteurs normés de E telle que $\|v_i - v_j\| = 1$ pour tout $i \neq j$.

Corrigé : 1. Soit $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On trouve

$$\mathrm{X}^\top \mathrm{GX} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i x_j \langle u_i, u_j\rangle = \|\sum_{i=1}^n x_i u_i\|^2 \geqslant 0$$

On conclut $\boxed{\mathrm{G} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})}$

2. Supposons qu'il existe $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathrm{E}^n$. Pour $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$ avec $i \neq j$, on obtient par polarisation

$$\langle v_i, v_j\rangle = \frac{1}{2}\left[\|v_i\|^2 + \|v_j\|^2 - \|v_i - v_j\|^2\right] = \frac{1}{2}$$

Soit G la matrice de Gram de la famille $(v_1, \ldots, v_n)$. On a

$$\mathrm{G} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \ldots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\mathrm{J} + \mathrm{I}_n) \quad \text{avec} \quad \mathrm{J} = \big(1\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

Pour $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on trouve

$$\mathrm{X}^\top \mathrm{GX} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{X}^\top \mathrm{JX} + \mathrm{X}^\top \mathrm{X}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i x_j + \sum_{i=1}^n x_i^2\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2\right) \geqslant 0$$

Par conséquent, il existe une matrice $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{G} = \mathrm{S}^2 = \mathrm{S}^\top\mathrm{S}$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. On choisit alors $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathrm{E}^n$ tel que $\mathrm{S} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_n)$ et $\mathrm{G} = \mathrm{S}^\top\mathrm{S}$. Avec ces choix, on a pour $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$

$$\left(\mathrm{S}^\top\mathrm{S}\right)_{i,j} = \sum_{k=1}^n \langle v_i, e_k\rangle \langle v_j, e_k\rangle = \langle v_i, v_j\rangle$$

On conclut

$$\boxed{\text{Il existe une famille de vecteurs normés et équidistants dans E euclidien de dimension } n.}$$

Remarque : Si $\dim \mathrm{E} \geqslant n$, le résultat vaut aussi : il suffit de considérer une famille $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathrm{E}^n$ libre.

Exercice 6 (**)

Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{A}^3 = \mathrm{B}^3$. Montrer que $\mathrm{A} = \mathrm{B}$.

Corrigé : Notons $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$. D'après le théorème spectral, on a

$$\bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}) = \mathrm{E}$$

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})$. On a clairement $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}) \subset \mathrm{E}_{\lambda^3}(\mathrm{A}^3)$. Puis, par injectivité de $u \mapsto u^3$ sur $\mathbb{R}$, les valeurs prises par λ^3 quand λ parcourt $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})$ sont deux à deux distinctes et par conséquent

$$\mathrm{E} = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}) \subset \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} \mathrm{E}_{\lambda^3}(\mathrm{A}^3) \subset \mathrm{E}$$

avec la dernière inclusion qui est en fait une égalité. Soit $\mu \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})$ et $x \in \mathrm{E}_{\mu^3}(\mathrm{A}^3)$. On note $x = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} x_\lambda$ sa décomposition dans $\bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A})$. C'est aussi une décomposition dans

$\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})} \mathrm{E}_{\lambda^3}(\mathrm{A}^3)$ du fait des inclusions des espaces propres et par unicité de la décomposition dans une somme directe, on en déduit $x = x_\mu$ d'où $x \in \mathrm{E}_\mu(\mathrm{A})$. Ainsi, on a

$$\mathrm{Sp}(\mathrm{A}^3) = \{\lambda^3, \lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})\} \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \qquad \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}) = \mathrm{E}_{\lambda^3}(\mathrm{A}^3)$$

On a de même pour la matrice B. Comme $\mathrm{A}^3 = \mathrm{B}^3$, il en résulte que $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \mathrm{Sp}(\mathrm{B})$ par injectivité de $u \mapsto u^3$ avec égalité des sous-espaces propres. On conclut

$$\boxed{\mathrm{A} = \mathrm{B}}$$

Remarque : On peut aussi considérer les dimensions dans la suite d'inclusions

$$\mathrm{E} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})} \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}) \subset \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})} \mathrm{E}_{\lambda^3}(\mathrm{A}^3) \subset \mathrm{E}$$

On en déduit que toutes les inclusions sont des égalités et notamment $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}) = \mathrm{E}_{\lambda^3}(\mathrm{A}^3)$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$.

Exercice 7 (***)

Soit E euclidien et $(u_1, \ldots, u_n)$ une base de E. On pose

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad f(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle u_i$$

1. Montrer que $f \in \mathscr{S}^{++}(\mathrm{E})$.
2. Justifier l'existence de $g \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$ tel que $g^2 = f^{-1}$.
3. Montrer que $(g(u_1), \ldots, g(u_n))$ est une base orthonormée de E.

Corrigé : 1. On a clairement $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ puis pour $(x, y) \in \mathrm{E}^2$

$$\langle f(x), y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle \langle y, u_i \rangle$$

expression symétrique en x et y et

$$\langle f(x), x \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle^2 \geqslant 0$$

avec $$\langle f(x), x \rangle = 0 \iff x \in \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)^\perp = \mathrm{E}^\perp \iff x = 0_\mathrm{E}$$

Ainsi $$\boxed{f \in \mathscr{S}^{++}(\mathrm{E})}$$

2. Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de vecteurs propres de f. On note $\mathrm{mat}_\mathscr{B} f = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. On a f inversible puisque $\mathrm{Sp}(f) \subset]\,0\,; +\infty\,[$ et $\mathrm{mat}_\mathscr{B} f^{-1}$ est diagonale avec des termes diagonaux $\dfrac{1}{\lambda_i}$ strictement positifs ce qui prouve $f^{-1} \in \mathscr{S}^{++}(\mathrm{E})$. On définit $g \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ avec $\mathrm{mat}_\mathscr{B} g = \mathrm{diag}(1/\sqrt{\lambda_1}, \ldots, 1/\sqrt{\lambda_n})$ diagonale donc symétrique dans une base orthonormée. On a $\mathrm{mat}_\mathscr{B} g^2 = \mathrm{mat}_\mathscr{B} f^{-1}$ d'où

$$\boxed{\text{Il existe } g \in \mathscr{S}(\mathrm{E}) \text{ tel que } g^2 = f.}$$

3. On note $v_j = f^{-1}(u_j)$ pour tout $j \in [\![1\,; n]\!]$. Soit $(i, j) \in [\![1\,; n]\!]^2$. On a

$$\langle g(u_i), g(u_j) \rangle = \langle u_i, g^2(u_j) \rangle = \langle u_i, f^{-1}(u_j) \rangle = \langle u_i, v_j \rangle$$

Or, on a $$f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \langle v_j, u_i \rangle\, u_i = u_j$$

d'où $\langle v_j, u_i \rangle = \delta_{i,j}$ par liberté de $(u_1, \ldots, u_n)$. Ainsi

$$\boxed{\text{La famille } (g(u_1), \ldots, g(u_n)) \text{ est une base orthonormée de E.}}$$

Exercice 8 (***)

Montrer $\qquad \forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})^2 \qquad 0 \leqslant \mathrm{Tr}\,(\mathrm{AB}) \leqslant \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{B})$

Corrigé : On peut trouver $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A} = \mathrm{S}^2$. D'après la propriété fondamentale de la trace, on a

$$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{AB}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{S}^2\mathrm{B}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{SBS})$$

et $\mathrm{SBS} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ sans difficulté. On en déduit $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{SBS}) \geqslant 0$. Puis, considérant le produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, il vient d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{AB}) = \langle \mathrm{A}, \mathrm{B} \rangle \leqslant \|\mathrm{A}\| \|\mathrm{B}\|$$

Notons $(\lambda_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]}$ les valeurs propres de A. On a

$$\|\mathrm{A}\|^2 = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^2) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right)^2$$

De même pour $\|\mathrm{B}\|$ et on conclut

$$\boxed{\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})^2 \qquad 0 \leqslant \mathrm{Tr}\,(\mathrm{AB}) \leqslant \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{B})}$$

Variante : On peut faire sans racine carrée matricielle. On dispose, d'après le théorème spectral, de $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ telles que $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^\top$ avec les $\lambda_i \geqslant 0$. Par propriété fondamentale de la trace, il vient

$$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{AB}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{PDP}^\top\mathrm{B}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{DB}') \quad \text{avec} \quad \mathrm{B}' = \mathrm{P}^\top\mathrm{BP}$$

On vérifie sans difficulté $\mathrm{B}' \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Notant $\mathrm{B}' = \left(\beta_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et E_i la colonne de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec 1 en i-ème ligne et des 0 ailleurs pour $i \in [\![1\,;\,n]\!]$, on obtient

$$\forall i \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad \beta_{i,i} = {\mathrm{E}_i}^\top \mathrm{B}' \mathrm{E}_i \geqslant 0$$

puis $\qquad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{AB}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{DB}') = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \beta_{i,i} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_{j,j} \right) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{B})$

la dernière inégalité résultant de la positivité des λ_i et $\beta_{j,j}$.

Exercice 9 (***)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{B} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que AB est diagonalisable avec $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{AB}) \subset [\,0\,;+\infty\,[$.

Corrigé : Soit $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A} = \mathrm{S}^2$. On a $(\det \mathrm{S})^2 = \det \mathrm{A} > 0$ d'où $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On trouve

$$\mathrm{AB} = \mathrm{S}^2\mathrm{B} = \mathrm{S}(\mathrm{SBS})\mathrm{S}^{-1}$$

Ainsi, la matrice AB est semblable à SBS et on vérifie sans difficulté que SBS est symétrique réelle donc ortho-diagonalisable d'après le théorème spectral. Enfin, pour $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il vient

$$\langle \mathrm{X}, \mathrm{SBSX} \rangle = \langle \mathrm{Y}, \mathrm{BY} \rangle \geqslant 0 \quad \text{avec} \quad \mathrm{Y} = \mathrm{SX}$$

On conclut $\qquad \boxed{\text{La matrice AB est diagonalisable avec } \mathrm{Sp}\,(\mathrm{AB}) \subset [\,0\,;+\infty\,[.}$

Exercice 10 (***)

Soit E euclidien et $f \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$. On pose

$$\mathrm{X} = \{x \in \mathrm{E} \mid \langle f(x), x\rangle \leqslant 1\}$$

Montrer que X est compact si et seulement si $f \in \mathscr{S}^{++}(\mathrm{E})$.

Corrigé : D'après le théorème spectral, on dispose de $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de f associés aux valeurs propres $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$. Pour $x \in \mathrm{E}$, on note $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ avec les x_i coordonnées de x dans $\mathscr{B}$. On a

$$\langle f(x), x\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right\rangle = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \lambda_i x_i x_j \underbrace{\langle e_i, e_j\rangle}_{=\delta_{i,j}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

Ainsi, l'application $\varphi : x \mapsto \langle f(x), x\rangle$ est polynomiale en les coordonnées de x dans $\mathscr{B}$ ce qui prouve sa continuité et $\mathrm{X} = \varphi^{-1}(]-\infty\,; 1])$ est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue. Par ailleurs, on a

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \langle f(x), x\rangle \geqslant \lambda_1 \|x\|^2$$

Si $f \in \mathscr{S}^{++}(\mathrm{E})$, alors

$$\langle f(x), x\rangle \leqslant 1 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 \|x\|^2 \leqslant 1 \quad \Longrightarrow \quad x \in \mathrm{B}_f\left(0, 1/\sqrt{\lambda_1}\right)$$

ce qui prouve $\qquad \mathrm{X} \subset \mathrm{B}_f\left(0, 1/\sqrt{\lambda_1}\right)$

L'ensemble X est donc un fermé borné de E espace de dimension finie. Par conséquent, l'ensemble X est compact. Si $f \notin \mathscr{S}^{++}(\mathrm{E})$, il existe $i_0 \in [\![1\,; n]\!]$ tel que $\lambda_{i_0} \leqslant 0$ et par suite

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad \alpha e_{i_0} \in \mathrm{X}$$

ce qui prouve que X est non borné et donc non compact. On conclut

$$\boxed{\mathrm{X} \text{ compact} \iff f \in \mathscr{S}^{++}(\mathrm{E})}$$

Exercice 11 (****)

1. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\mathrm{O} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ uniques telles que $\mathrm{A} = \mathrm{OS}$.
2. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\mathrm{O} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{A} = \mathrm{OS}$.
3. A-t-on l'unicité dans la question précédente ?

Corrigé : 1. S'il existe $(\mathrm{O}, \mathrm{S}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{A} = \mathrm{OS}$, il s'ensuit $\mathrm{S}^2 = \mathrm{A}^\top \mathrm{A}$. Or, on a $\mathrm{A}^\top \mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R})$. Ainsi, il existe une unique matrice $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}^\top \mathrm{A} = \mathrm{S}^2$. On a S inversible puisque $(\det \mathrm{S})^2 = (\det \mathrm{A})^2 > 0$. Posons ensuite $\mathrm{O} = \mathrm{AS}^{-1}$. On a

$$\mathrm{O}^\top \mathrm{O} = \left(\mathrm{AS}^{-1}\right)^\top \mathrm{AS}^{-1} = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}^\top \mathrm{AS} = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{S}^2\mathrm{S} = \mathrm{I}_n$$

Le choix de O est unique puisqu'il découle du choix de S qui est unique. On conclut

$$\boxed{\forall \mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \qquad \exists! (\mathrm{O}, \mathrm{S}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \quad | \quad \mathrm{A} = \mathrm{OS}}$$

2. On sait que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi, pour $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $(\mathrm{A}_p)_p \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que $\mathrm{A}_p \xrightarrow[p\to\infty]{} \mathrm{A}$. D'après ce qui précède, on a

$$\forall p \in \mathbb{N} \qquad \exists (\mathrm{O}_p, \mathrm{S}_p) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R}) \quad | \quad \mathrm{A}_p = \mathrm{O}_p \mathrm{S}_p$$

Par compacité de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, il existe φ extractrice telle que

$$\mathrm{O}_{\varphi(p)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \mathrm{O} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$$

Par ailleurs $\qquad \forall p \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{S}_p = {\mathrm{O}_p}^\top \mathrm{A}_p$

Par continuité du produit matriciel, la suite $\left(\mathrm{S}_{\varphi(p)}\right)_p$ converge. Montrons la fermeture de $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Soit $(\mathrm{M}_p)_p \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ avec $\mathrm{M}_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} \mathrm{M}$. Par continuité de la transposition (linéaire en dimension finie), on a $\mathrm{M}_p = {\mathrm{M}_p}^\top \xrightarrow[p\to+\infty]{} \mathrm{M}^\top$ d'où $\mathrm{M}^\top = \mathrm{M}$ puis, pour $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{X}^\top\mathrm{M}_p\mathrm{X} \geqslant 0$ pour tout p entier et par continuité du produit matriciel

$$\mathrm{X}^\top\mathrm{M}_p\mathrm{X} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \mathrm{X}^\top\mathrm{M}\mathrm{X} \geqslant 0$$

Il s'ensuit que $\mathrm{S}_{\varphi(p)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et on conclut

$$\boxed{\forall \mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \qquad \exists (\mathrm{O},\mathrm{S}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) \quad \mid \quad \mathrm{A} = \mathrm{OS}}$$

Remarques : (a) Ce résultat est intitulé *décomposition polaire* ou *décomposition de Cartan.*
(b) On peut éviter le raisonnement par densité en utilisant le résultat de l'exercice 3 feuille 56. Tout d'abord, il existe une unique matrice $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}^\top\mathrm{A} = \mathrm{S}^2$. Notant f et s les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associés à A et S, on a

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2 \qquad \langle f(e_i), f(e_j)\rangle = \langle s(e_i), s(e_j)\rangle$$

Alors, il existe $g \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ tel que $g(s(e_i)) = f(e_i)$ pour $i \in [\![1\,;\, n]\!]$ et le résultat suit.

3. Si 0 est valeur propre, l'unicité n'est plus garantie car n'importe quelle base orthonormée fait l'affaire pour l'espace propre $\mathrm{E}_0(\mathrm{A})$. Par exemple, avec

$$\mathrm{A} = \operatorname{diag}(1,0) \qquad \mathrm{P} = \mathrm{I}_2 \quad \text{et} \quad \mathrm{Q} = \operatorname{diag}(1,-1)$$

On trouve $\quad \mathrm{A} = \mathrm{PS} = \mathrm{QS} \quad$ avec $\quad \mathrm{S} = \mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}), \quad (\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})^2 \quad$ et $\quad \mathrm{P} \neq \mathrm{Q}$

Ainsi

$$\boxed{\text{L'unicité de la décomposition de Cartan n'est pas assurée pour une matrice non inversible.}}$$

Variante : Contre-exemple encore plus simple avec $\mathrm{A} = \mathrm{S} = 0$, $\mathrm{P} = \mathrm{I}_n$ et $\mathrm{Q} = -\mathrm{I}_n$.

Exercice 12 (***)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{B} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{D} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telle que
$$\mathrm{A} = \mathrm{P}^\top\mathrm{P} \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = \mathrm{P}^\top\mathrm{D}\mathrm{P}$$
2. Établir $\;\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) \qquad \det(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \geqslant \det(\mathrm{A}) + \det(\mathrm{B})$
3. Le résultat précédent a-t-il lieu si on suppose seulement $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$?

Corrigé : 1. Il existe $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A} = \mathrm{S}^2$ et $\det \mathrm{A} = (\det \mathrm{S})^2$ d'où $\mathrm{S} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On peut donc écrire $\mathrm{B} = \mathrm{SCS}$ avec $\mathrm{C} = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{B}\mathrm{S}^{-1}$ qui est symétrique. Par suite, avec le théorème spectral, il existe $\mathrm{Q} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale réelle telle que $\mathrm{C} = \mathrm{Q}^\top\mathrm{D}\mathrm{Q}$. Posant $\mathrm{P} = \mathrm{QS}$, on a

$$\mathrm{P}^\top\mathrm{P} = \mathrm{S}\mathrm{Q}^\top\mathrm{Q}\mathrm{S} = \mathrm{S}^2 = \mathrm{A} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}^\top\mathrm{D}\mathrm{P} = \mathrm{S}\mathrm{Q}^\top\mathrm{D}\mathrm{Q}\mathrm{S} = \mathrm{SCS} = \mathrm{B}$$

et la matrice P est inversible comme produit de matrices inversibles. Ainsi

$$\boxed{\text{Il existe } \mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \mathrm{D} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ diagonale telles que } \mathrm{A} = \mathrm{P}^\top\mathrm{P} \text{ et } \mathrm{B} = \mathrm{P}^\top\mathrm{DP}.}$$

2. On applique le résultat précédent. On a

$$\det(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \det(\mathrm{P}^\top\mathrm{P} + \mathrm{P}^\top\mathrm{DP}) = \det(\mathrm{P}^\top)\det(\mathrm{I}_n + \mathrm{D})\det(\mathrm{P})$$

avec $\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1\top}\mathrm{BP}^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Pour $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, notant $\mathrm{Y} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}$, on a

$$\langle \mathrm{X}, \mathrm{DX}\rangle = \mathrm{Y}^\top\mathrm{P}^\top\mathrm{DPY} = \langle \mathrm{Y}, \mathrm{BY}\rangle \geqslant 0$$

d'où $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{D}) \subset \mathbb{R}_+$, autrement dit les $\lambda_i \geqslant 0$. On a

$$\det(\mathrm{I}_n + \mathrm{D}) = \prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i) \geqslant 1 + \prod_{i=1}^{n}\lambda_i = 1 + \det(\mathrm{D})$$

Ainsi $\qquad \det(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \geqslant \det(\mathrm{P}^\top)\,(1+\det(\mathrm{D}))\det(\mathrm{P}) = \det(\mathrm{P}^\top\mathrm{P}) + \det(\mathrm{P}^\top\mathrm{DP})$

On conclut $\qquad \boxed{\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R}) \qquad \det(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \geqslant \det\mathrm{A} + \det\mathrm{B}}$

3. Si A ou B est dans $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, il s'agit du résultat précédemment établi (par symétrie des rôles). Supposons A et B dans $\mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R}) \smallsetminus \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On a $\mathrm{A}+\mathrm{B} \in \mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ d'où $\det(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \geqslant 0$ et $\det(\mathrm{A}) = \det(\mathrm{B}) = 0$ et par conséquent

$$\boxed{\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R}) \qquad \det(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \geqslant \det(\mathrm{A}) + \det(\mathrm{B})}$$

Exercice 13 (***)

Pour $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer $\underset{\mathrm{P}\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})}{\mathrm{Max}}\ \mathrm{Tr}\,(\mathrm{PA})$.

Corrigé : L'application $\varphi : \mathrm{P} \mapsto \mathrm{Tr}\,(\mathrm{PA})$ est linéaire sur $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ espace de dimension finie donc continue. Le groupe orthogonal $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un compact de E et d'après le théorème des bornes atteintes, l'application φ admet un maximum sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. D'après le décomposition de Cartan, on sait qu'il existe $\mathrm{R} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{A} = \mathrm{RS}$. On a $\mathrm{A}^\top\mathrm{A} = \mathrm{S}^2$ et par unicité de la racine carrée matricielle dans $\mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R})$, la matrice S est unique. L'application $\mathrm{P} \mapsto \mathrm{PR}$ réalise une permutation de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et par conséquent

$$\underset{\mathrm{P}\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})}{\mathrm{Max}}\ \varphi(\mathrm{P}) = \underset{\mathrm{P}\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})}{\mathrm{Max}}\ \mathrm{Tr}\,(\mathrm{PS})$$

D'après le théorème spectral et la positivité de S, il existe $\mathrm{Q} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec les $\lambda_i \geqslant 0$ telles que $\mathrm{S} = \mathrm{QDQ}^\top$. Avec la propriété fondamentale de la trace, il vient

$$\forall \mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \qquad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{PS}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{PQDQ}^\top) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{Q}^\top\mathrm{PQD})$$

Comme précédemment, l'application $\mathrm{P} \mapsto \mathrm{Q}^\top\mathrm{PQ}$ réalise une permutation de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Ainsi, on obtient

$$\underset{\mathrm{P}\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})}{\mathrm{Max}}\ \varphi(\mathrm{P}) = \underset{\mathrm{P}\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})}{\mathrm{Max}}\ \mathrm{Tr}\,(\mathrm{PD})$$

Soit $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Le calcul donne $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{PD}) = \sum\limits_{i=1}^{n} p_{i,i}\lambda_i$. Comme la matrice P est orthogonale, ses colonnes forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ et il en résulte que $p_{i,j} \leqslant 1$ pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$. Par positivité des λ_i, il vient pour

$$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{PD}) = \sum_{i=1}^{n} p_{i,i}\lambda_i \leqslant \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{D})$$

majorant qui est atteint pour $\mathrm{P} = \mathrm{I}_n$. Les matrices D et S étant semblables, on conclut

$$\boxed{\underset{\mathrm{P}\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})}{\mathrm{Max}}\ \mathrm{Tr}\,(\mathrm{PA}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{S})}$$

Remarque : La matrice S est définie de manière unique par $\mathrm{S} = \sqrt{\mathrm{A}^\top\mathrm{A}}$.

Exercice 14 (***)

1. Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que si G est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ contenant $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{G} = \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Corrigé : 1. Déjà vu.
2. Soit G sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ contenant $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et soit $\mathrm{A} \in \mathrm{G}$. On utilise le résultat de la décomposition polaire : il existe $\mathrm{O} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{A} = \mathrm{OS}$. Ainsi, on a $\mathrm{S} = \mathrm{O}^\top \mathrm{A} \in \mathrm{G}$ et par conséquent $\mathrm{S}^k \in \mathrm{G}$ pour tout k entier. La suite $(\mathrm{S}^k)_k$ est à valeurs dans G compact donc admet une sous-suite convergente. D'après le théorème spectral, il existe $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{P}^\top\mathrm{SP}$ est diagonale. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{S})$ et $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ normée avec $\mathrm{SX} = \lambda\mathrm{X}$. Si $\lambda > 1$, on a

$$\left\langle \mathrm{S}^k\mathrm{X}, \mathrm{X} \right\rangle = \lambda^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty$$

ce qui contredit l'existence d'une sous-suite convergente. Si $\lambda < 1$, on trouve

$$\left\langle \mathrm{S}^k\mathrm{X}, \mathrm{X} \right\rangle = \lambda^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$

et une sous-suite convergente aurait une valeurs propre nulle ce qui contredit l'existence d'une valeur d'adhérence dans G. Par conséquent, on $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{S}) = \{1\}$ et comme S est diagonalisable, elle est semblable à I_n et donc $\mathrm{S} = \mathrm{I}_n$, d'où $\mathrm{A} = \mathrm{O}$. On conclut

$$\boxed{\mathrm{G} = \mathcal{O}_n(\mathbb{R})}$$

Exercice 15 (**)

Soit E euclidien et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $\langle u(x), x\rangle = 0$ pour tout $x \in \mathrm{E}$.

1. Montrer $\qquad \forall (x,y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle$

   En déduire la forme $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u$ avec $\mathscr{B}$ base orthonormée de E.
2. On suppose $u \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$. Montrer que $\dim \mathrm{E}$ est paire.
3. Montrer que u^2 est diagonalisable.

Corrigé : 1. Soit $(x,y) \in \mathrm{E}^2$. Il vient

$$\langle u(x+y), x+y\rangle = 0 \iff \langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle = 0$$

D'où $$\boxed{\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle}$$

Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ base orthonormée de E et $\mathrm{A} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u$. On a

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2 \qquad a_{i,j} = \langle u(e_j), e_i\rangle = -\langle u(e_i), e_j\rangle = -a_{j,j}$$

Ainsi $\quad$ $\boxed{\text{Dans } \mathscr{B} \text{ base orthonormée de E, la matrice } \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u \text{ est antisymétrique.}}$

Remarque : La relation établie équivaut à $u^* = -u$ et le résultat sur $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u$ s'ensuit.

2. Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E. On a $\det u = \det \mathrm{A}$ avec $\mathrm{A} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u$. Or, la matrice A est antisymétrique et comme une matrice et sa transposée ont même déterminant, il s'ensuit

$$\det \mathrm{A} = \det \mathrm{A}^\top = \det(-\mathrm{A}) = (-1)^n \det \mathrm{A}$$

Si n est impair, on a $\det \mathrm{A} = -\det \mathrm{A}$ d'où $u \notin \mathrm{GL}(\mathrm{E})$. On conclut

$$\boxed{\text{Si } u \in \mathrm{GL}(\mathrm{E}), \text{ alors la dimension de E est paire.}}$$

3. Soit $(x, y) \in \mathrm{E}^2$. On a avec la propriété établie en première question

$$\langle u^2(x), y \rangle = -\langle u(x), u(y) \rangle = (-1)^2 \langle x, u^2(y) \rangle$$

ce qui prouve que $u^2 \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$. D'après le théorème spectral, on conclut

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } u^2 \text{ est diagonalisable.}}$$