Devoir en temps libre n°14

Problème I

Soit $(u_n)_n$ suite à valeurs positives sous-additive, c'est-à-dire telle que

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2 \qquad u_{n+m} \leqslant u_n + u_m$$

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées. On note $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k$ pour $n \geqslant 1$. On suppose qu'on dispose de $a > 0$ tel que $\mathbb{P}(\mathrm{X}_1 \geqslant a) > 0$.

1. Soient m et r des entiers. Établir
$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad u_{km+r} \leqslant k u_m + u_r$$
2. Justifier que la borne inférieure $\mathrm{L} = \inf \left\{ \dfrac{u_k}{k}, k \in \mathbb{N}^* \right\}$ est bien définie.
3. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe m entier non nul tel que
$$\mathrm{L} \leqslant \frac{u_m}{m} \leqslant \mathrm{L} + \varepsilon$$
puis établir $$\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{L}$$
On pourra effectuer la division euclidienne de n par m.
4. Établir pour m et n entiers non nuls
$$\mathbb{P}\left(\mathrm{S}_{m+n} - \mathrm{S}_m \geqslant na\right) \mathbb{P}(\mathrm{S}_m \geqslant ma) \leqslant \mathbb{P}\left(\mathrm{S}_{m+n} \geqslant (n+m)a\right)$$
puis en déduire $\mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant na)\mathbb{P}(\mathrm{S}_m \geqslant ma) \leqslant \mathbb{P}\left(\mathrm{S}_{m+n} \geqslant (n+m)a\right)$
5. Conclure que la suite $\left(\dfrac{1}{n} \ln\left(\mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant na)\right)\right)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

Problème II

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé, X une variable aléatoire réelle discrète et $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X. On note $\mathrm{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ pour n entier. On suppose qu'il existe $\tau > 0$ tel que $\mathrm{e}^{\tau|\mathrm{X}|}$ est d'espérance finie. On note $\mathrm{X}(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ avec les x_n deux à deux distincts et

$$\mathrm{I} = \left\{ t \in \mathbb{R} \mid \mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}}) < \infty \right\}$$

1. Vérifier $[\,-\tau\,;\tau\,] \subset \mathrm{I}$ puis, pour $(a,b) \in \mathrm{I}^2$, établir
$$\forall t \in [\,a\,;b\,] \qquad 0 \leqslant \mathrm{e}^{t\mathrm{X}} \leqslant \mathrm{e}^{a\mathrm{X}} + \mathrm{e}^{b\mathrm{X}}$$
En déduire que la fonction $\varphi : t \mapsto \mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}})$ est définie sur un intervalle contenant $[\,-\tau\,;\tau\,]$.

2. On pose $\quad \forall (n,t) \in \mathbb{N} \times \left]-\tau\,;\tau\right[\qquad u_n(t) = \mathrm{e}^{t x_n} \mathbb{P}(\mathrm{X} = x_n)$

   Justifier que les fonctions u_n sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left]-\tau\,;\tau\right[$ puis établir

   $$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \forall a \in \left]0\,;\tau\right[\qquad \|u_n^{(k)}\|_{\infty,[-a\,;a]} = \mathrm{O}\left(\mathrm{e}^{\tau|x_n|}\mathbb{P}(\mathrm{X} = x_n)\right)$$

3. En déduire que φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left]-\tau\,;\tau\right[$.

4. Montrer que pour a réel, on a

   $$\forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathrm{I} \cap \mathbb{R}_+ \qquad \mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant na) \leqslant \exp\left(n\chi(t)\right) \quad \text{avec} \quad \chi(t) = \ln \varphi(t) - ta$$

   On suppose désormais qu'il existe un réel a tel que $a > \mathbb{E}(\mathrm{X})$ et $\mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant a) > 0$.

5. Vérifier que χ est minorée sur $\mathrm{I} \cap \mathbb{R}_+$.
   On note $\eta_a = \operatorname*{Inf}_{t \in \mathrm{I} \cap \mathbb{R}_+} \chi(t)$.

6. Justifier que φ admet un développement limité à l'ordre 1 en zéro que l'on précisera.

7. Déterminer un équivalent de $\chi(t)$ lorsque $t \to 0$. En déduire $\eta_a < 0$.

8. Conclure qu'il existe $r \in \left[0\,;1\right[$ tel que

   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant na) \leqslant r^n$$