Corrigé du devoir en temps libre n°13

Problème I

1. Soit $x \in \operatorname{Ker} u$. On a $\langle u(x), x\rangle = 0$ d'où $x = 0_{\mathrm{E}}$ ce qui prouve l'injectivité de l'endomorphisme u dans E espace de dimension finie et par conséquent

$$\boxed{u \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})}$$

Soit $(x, y) \in \mathrm{E}^2$. Par bijectivité de u, on dispose d'un unique couple $(a, b) \in \mathrm{E}^2$ tel que $x = u(a)$ et $y = u(b)$. Il vient

$$\langle u^{-1}(x), y\rangle = \langle u^{-1}(u(a)), u(b)\rangle = \langle a, u(b)\rangle \underbrace{=}_{u\in\mathscr{S}(\mathrm{E})} \langle u(a), b\rangle = \langle x, u^{-1}(y)\rangle$$

ce qui prouve $u^{-1} \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$. Pour $x \in \mathrm{E} \smallsetminus \{0_{\mathrm{E}}\}$, on dispose d'un unique $a \in \mathrm{E} \smallsetminus \{0_{\mathrm{E}}\}$ tel que $x = u(a)$ puisque $u(0_{\mathrm{E}}) = 0_{\mathrm{E}}$ et

$$\langle u^{-1}(x), x\rangle = \langle u^{-1}(u(a)), u(a)\rangle = \langle a, u(a)\rangle > 0$$

puisque $u \in \mathscr{S}^{++}(\mathrm{E})$. Ainsi, on a prouvé

$$\boxed{u^{-1} \in \mathscr{S}^{++}(\mathrm{E})}$$

Remarque : Pour établir $u^{-1} \in \mathcal{S}(\mathrm{E})$, on peut aussi passer par l'adjoint en observant

$$(u^{-1})^* = (u^*)^{-1} = u^{-1}$$

2. D'après le théorème spectral, on dispose de $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de u associée aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et pour $i \in [\![1 ; n]\!]$, on a

$$\langle u(e_i), e_i\rangle = \lambda_i \|e_i\|^2 = \lambda_i > 0$$

On conclut

$$\boxed{\text{Il existe une base orthonormée de vecteurs propres de } u \text{ et } \mathrm{Sp}\,(u) \subset]\,0 \,; +\infty\,[.}$$

3.(a) La fonction θ est dérivable sur $]\,0 \,; +\infty\,[$ avec

$$\forall \lambda > 0 \qquad \theta'(\lambda) = \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{\lambda^2} = \frac{(\lambda+\alpha)(\lambda-\alpha)}{\alpha\lambda^2}$$

Ainsi $\boxed{\text{La fonction } \theta \text{ décroît sur }]\,0 \,; \alpha\,] \text{ puis croît sur } [\,\alpha \,; +\infty\,[.}$

3.(b) On a clairement $\quad 0 < \lambda_{\min} \leqslant \alpha \leqslant \lambda_{\max}$

et d'après l'étude de variations, la fonction θ atteint son maximum sur $[\,\lambda_{\min} \,; \lambda_{\max}\,]$ en $\lambda = \lambda_{\min}$ ou $\lambda_{\max}$. Enfin, on observe

$$\theta(\lambda_{\min}) = \theta(\lambda_{\max}) = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}} + \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}}$$

Par conséquent $\boxed{\forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(u) \qquad \theta(\lambda) \leqslant \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}} + \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}}}$

4. Pour a, $b \geqslant 0$, on a $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 = a+b-2\sqrt{ab} \geqslant 0$ d'où

$$\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^2 \qquad \sqrt{ab} \leqslant \frac{1}{2}(a+b)}$$

Soit $x \in \mathrm{E}$. On a par linéarité du produit scalaire en la première variable

$$\sqrt{\langle u(x), x\rangle \langle u^{-1}(x), x\rangle} = \sqrt{\left\langle \frac{1}{\alpha} u(x), x \right\rangle \langle \alpha u^{-1}(x), x\rangle}$$

et d'après l'inégalité précédemment établie

$$\sqrt{\left\langle \frac{1}{\alpha} u(x), x \right\rangle \langle \alpha u^{-1}(x), x\rangle} \leqslant \frac{1}{2}\left(\left\langle \frac{1}{\alpha} u(x), x \right\rangle + \langle \alpha u^{-1}(x), x\rangle\right)$$

Par linéarité du produit scalaire en la première variable, on conclut

$$\boxed{\forall x \in \mathrm{E} \qquad \sqrt{\langle u(x), x\rangle \langle u^{-1}(x), x\rangle} \leqslant \frac{1}{2}\left\langle \left(\frac{1}{\alpha} u + \alpha u^{-1}\right)(x), x \right\rangle}$$

5. On a $\quad \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \quad$ et $\quad \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u^{-1} = (\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u)^{-1} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}\right)$

Ainsi $$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}\left(\frac{1}{\alpha} u + \alpha u^{-1}\right) = \mathrm{diag}\left(\theta(\lambda_1), \ldots, \theta(\lambda_n)\right)$$

Ainsi, pour $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ avec les x_i réels, on obtient

$$\left\langle \left(\frac{1}{\alpha} u + \alpha u^{-1}\right)(x), x \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \theta(\lambda_i) x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right\rangle = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \theta(\lambda_i) x_i x_j \underbrace{\langle e_i, e_j \rangle}_{=\delta_{i,j}}$$

On conclut $$\boxed{\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in \mathrm{E} \qquad \left\langle \left(\frac{1}{\alpha} u + \alpha u^{-1}\right)(x), x \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \theta(\lambda_i) x_i^2}$$

6. D'après la majoration établie à la question 3.(b), il vient pour $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \in \mathrm{E}$

$$\sum_{i=1}^{n} \theta(\lambda_i) x_i^2 \leqslant \left(\sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}} + \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}}\right) \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}_{=\|x\|^2}$$

Passant au carré dans cette inégalité et celle obtenue à la question 4, on conclut

$$\boxed{\forall x \in \mathrm{E} \qquad \langle u(x), x\rangle \langle u^{-1}(x), x\rangle \leqslant \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}} + \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}}\right)^2 \|x\|^4}$$

Problème II

Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associée M. On munit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. On a $f \in \mathscr{S}^+(\mathrm{E})$ puisque $\mathrm{M} = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}} f \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, la base canonique $\mathscr{C}$ étant une base orthonormée de E et $\mathrm{Sp}\,(f) = \mathrm{Sp}\,(\mathrm{M}) \subset \mathbb{R}_+$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de diagonalisation de f (une telle base existe d'après le théorème spectral). On a

$f(e_i) = \lambda_i e_i$ pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$ avec $\lambda_i \geqslant 0$. On définit $g \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ par $g(e_i) = \sqrt{\lambda_i} e_i$ pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$. On a f et g^2 qui coïncident sur une base d'où $f = g^2$ et $g \in \mathscr{S}^+(\mathrm{E})$ puisque $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} g \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrons l'unicité d'un tel endomorphisme. Soit $h \in \mathscr{S}^+(\mathrm{E})$ tel que $f = h^2$. Comme f est un polynôme en h, alors f et h commutent. Par suite, les sous-espaces propres de f sont stables par h. Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(f)$, on note E_λ le sous-espace propre de f pour la valeur propre λ et h_λ l'endomorphisme induit par h sur E_λ. On a clairement $h_\lambda \in \mathscr{S}^+(\mathrm{E}_\lambda)$ et $h_\lambda^2 = \lambda\,\mathrm{id}_{\,\mathrm{E}_\lambda}$ d'où $(\mathrm{X}^2 - \lambda)$ annulateur de h_λ. D'après le théorème spectral, l'endomorphisme h_λ est diagonalisable avec $\sqrt{\lambda}$ comme unique valeur propre possible (car $-\sqrt{\lambda} \leqslant 0$) ce qui prouve que $h_\lambda = \sqrt{\lambda}\,\mathrm{id}_{\,\mathrm{E}_\lambda}$. Comme $\mathrm{E} = \bigoplus\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(f)} \mathrm{E}_\lambda$, l'endomorphisme h est donc caractérisé et en repassant à l'écriture matricielle, on conclut

$$\boxed{\forall \mathrm{M} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) \qquad \exists! \mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) \quad | \quad \mathrm{M} = \mathrm{S}^2}$$

Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. S'il existe $(\mathrm{O}, \mathrm{S}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{A} = \mathrm{OS}$, il s'ensuit $\mathrm{S}^2 = \mathrm{A}^\top \mathrm{A}$. Or, on a $\mathrm{A}^\top \mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Ainsi, il existe une unique matrice $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}^\top \mathrm{A} = \mathrm{S}^2$. On a S inversible puisque $(\det \mathrm{S})^2 = (\det \mathrm{A})^2 > 0$. On pose $\mathrm{O} = \mathrm{AS}^{-1}$. Il vient

$$\mathrm{O}^\top \mathrm{O} = (\mathrm{AS}^{-1})^\top \mathrm{AS}^{-1} = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}^\top \mathrm{AS} = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{S}^2\mathrm{S} = \mathrm{I}_n$$

Le choix de O est unique puisqu'il découle du choix de S qui est unique. L'application φ est donc bijective et continue par continuité du produit matriciel. Soit $(\mathrm{A}_k)_k \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^\mathbb{N}$ telle que $\mathrm{A}_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} \mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrons $\varphi^{-1}(\mathrm{A}_k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} \varphi^{-1}(\mathrm{A})$. D'après ce qui précède, pour tout k entier, il existe $(\mathrm{O}_k, \mathrm{S}_k) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{A}_k = \mathrm{O}_k \mathrm{S}_k$ et $(\mathrm{O}, \mathrm{S}) \in\in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{A} = \mathrm{OS}$. Par compacité de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on dispose d'une extractrice φ telle que

$$\mathrm{O}_{\varphi(k)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} \mathrm{O}' \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$$

Par continuité du produit matriciel, il vient

$$\mathrm{S}_{\varphi(k)} = {\mathrm{O}_{\varphi(k)}}^\top \mathrm{A}_{\varphi(k)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} \mathrm{O}'^\top \mathrm{A}$$

La suite $(\mathrm{S}_k)_k$ est à valeurs dans le fermé $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ d'où $\mathrm{S}' = \mathrm{O}'^\top \mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et comme il s'agit d'un produit de matrices inversibles, il s'ensuit $\mathrm{S}' \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On a donc

$$\mathrm{O}'\mathrm{S}' = \mathrm{A} = \mathrm{OS} \quad \text{avec} \quad (\mathrm{O}, \mathrm{S}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (\mathrm{O}', \mathrm{S}') \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

Par unicité de la décomposition polaire, il vient $\mathrm{O}' = \mathrm{O}$ et $\mathrm{S}' = \mathrm{S}$. Ceci prouve en particulier que la suite $(\mathrm{O}_k)_k$ à valeurs dans le compact $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ admet O comme unique valeur d'adhérence. Il en résulte que $\mathrm{O}_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} \mathrm{O}$ et $\mathrm{S}_k = {\mathrm{O}_k}^\top \mathrm{A}_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} \mathrm{O}^\top \mathrm{A} = \mathrm{S}$. On a donc établi

$$\varphi^{-1}(\mathrm{A}_k) = (\mathrm{O}_k, \mathrm{S}_k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} (\mathrm{O}, \mathrm{S}) = \varphi^{-1}(\mathrm{A})$$

$$\boxed{\text{L'application } \varphi \text{ est un homéomorphisme.}}$$