ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°69

Exercice 1 (**)

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) + f(-x) = \mathrm{e}^{x} \tag{E}$$

Corrigé : Soit f solution de (E). On a $f'(x) = -f(-x) + \mathrm{e}^{x}$ pour x réel d'où f' dérivable. Par dérivation, il vient

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f''(x) - f'(-x) = \mathrm{e}^{x}$$

En substituant x par $-x$ dans la relation de départ, on a $f'(-x) + f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ pour x réel d'où

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f''(x) + f(x) = 2\,\mathrm{ch}\,(x)$$

Ainsi, il existe α, β réels tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \mathrm{ch}\,(x) + \alpha\cos(x) + \beta\sin(x)$$

Réciproquement, on injecte dans l'équation (E) et on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (\alpha+\beta)(\cos(x) - \sin(x)) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha + \beta = 0$$

Finalement $\boxed{\mathrm{S_E} = \{x \mapsto \mathrm{ch}\,(x) + \alpha(\cos(x) - \sin(x)),\ \alpha \in \mathbb{R}\}}$

Remarque : La forme de $\mathrm{S_E}$ était en partie prévisible. En effet, il s'agit de résoudre une équation du type $\Phi(f) = \exp$ avec $\Phi : f \mapsto (x \mapsto f'(x) + f(-x))$ et on peut établir, en suivant la même trame que dans la résolution ci-avant, que le noyau $\mathrm{Ker}\,\Phi$ est une droite vectorielle.

Exercice 2 (***)

Soit $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(a, m) \in \mathbb{K}^2$ avec $a \neq m$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] \smallsetminus \{0\}$ avec $p = \deg \mathrm{P}$. On considère l'équation différentielle

$$x' = ax + \mathrm{P}(t)\mathrm{e}^{mt} \tag{L}$$

1. Soit
$$\Phi\colon \begin{cases} \mathbb{K}_p[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathbb{K}_p[\mathrm{X}] \\ \quad \mathrm{Q} \quad \longmapsto \mathrm{Q}' + (m-a)\mathrm{Q} \end{cases}$$
Comparer $\deg \mathrm{Q}$ avec $\deg \Phi(\mathrm{Q})$ pour $\mathrm{Q} \in \mathbb{K}_p[\mathrm{X}]$ et montrer que $\Phi \in \mathrm{GL}(\mathbb{K}_p[\mathrm{X}])$.
2. En déduire que l'équation (L) admet une solution particulière x_0 de la forme $x_0(t) = \mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{mt}$ pour t réel avec $\mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $\deg \mathrm{Q} = \deg \mathrm{P}$.

   Dans ce qui suit, on note $x(t) = \lambda \mathrm{e}^{at} + \mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{mt}$ une solution de (L) et α le coefficient dominant de P.
3. Si $\mathrm{Re}\,(m) > \mathrm{Re}\,(a)$, déterminer un équivalent simple de $x(t)$ pour $t \to +\infty$.
4. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} (a-m)^{-(k+1)} \left[\mathrm{Q}' + (m-a)\mathrm{Q}\right]^{(k)}$.
5. En déduire une expression de λ en fonction de $x(0)$ et P.
6. Si $\mathrm{Re}\,(m) < \mathrm{Re}\,(a)$, déterminer un équivalent simple de $x(t)$ pour $t \to +\infty$.

Corrigé : 1. L'application Φ est linéaire par linéarité de la dérivation et du produit à gauche. Soit $\mathrm{Q} \in \mathbb{K}_p[\mathrm{X}]$. Si $\deg \mathrm{Q} \geqslant 0$, alors $\deg \mathrm{Q}' < \deg \mathrm{Q}$ et par suite, comme $m-a \neq 0$, on a

$$\deg \Phi(\mathrm{Q}) = \deg\left[\mathrm{Q}' + (m-a)\mathrm{Q}\right] = \deg \mathrm{Q}$$

Il en résulte que $\Phi \in \mathscr{L}(\mathbb{K}_p[\mathrm{X}])$ et aussi $\mathrm{Ker}\ \Phi = \{0\}$. Comme un endomorphisme injectif d'un espace de dimension finie est bijectif, on conclut

$$\boxed{\forall \mathrm{Q} \in \mathbb{K}_p[\mathrm{X}] \qquad \deg \Phi(\mathrm{Q}) = \deg \mathrm{Q} \quad \text{et} \quad \Phi \in \mathrm{GL}(\mathbb{K}_p[\mathrm{X}])}$$

2. Soit x_0 de la forme $x_0(t) = \mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{mt}$ avec $\mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Si x_0 solution de (L), il vient

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{Q}'(t) + (m-a)\mathrm{Q}(t) = \mathrm{P}(t)$$

Si on suppose $\mathrm{Q} \in \mathbb{K}_p[\mathrm{X}]$, comme la relation vaut pour une infinité de valeurs, elle équivaut à

$$\Phi(\mathrm{Q}) = \mathrm{P}$$

D'après l'étude faite à la première question, il existe un unique $\mathrm{Q} \in \mathbb{K}_p[\mathrm{X}]$ tel que $\Phi(\mathrm{Q}) = \mathrm{P}$ et on a $\deg \Phi(\mathrm{Q}) = \deg \mathrm{Q} = \deg \mathrm{P}$. On conclut

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Il existe une unique solution particulière } x_0 \text{ de la forme} \\ x_0(t) = \mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{mt} \text{ pour } t \text{ réel avec } \mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] \text{ et } \deg \mathrm{Q} = \deg \mathrm{P}.\end{array}}$$

3. Le polynôme Q est non nul (car P ne l'est pas) et admet donc un nombre fini de racines d'où $\mathrm{Q}(x) \neq 0$ pour $x \geqslant \mathrm{A}$ avec A un certain réel. On a

$$\forall x \geqslant \mathrm{A} \qquad x(t) = \mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{mt}\left[1 + \frac{\lambda}{\mathrm{Q}(t)}\mathrm{e}^{(a-m)t}\right] \quad \text{et} \quad \left|\mathrm{e}^{(a-m)t}\right| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,(a-m)t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Par suite
$$x(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{mt} \underset{t\to+\infty}{\sim} \beta t^p \mathrm{e}^{mt}$$

avec β le coefficient dominant de Q. Dans la relation

$$\mathrm{Q}' + (m-a)\mathrm{Q} = \mathrm{P}$$

l'égalité des coefficients dominants donne $(m-a)\beta = \alpha$ et on obtient

$$\boxed{\text{Si } \mathrm{Re}\,(m) > \mathrm{Re}\,(a), \text{ alors} \quad x(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{m-a} t^p \mathrm{e}^{mt}}$$

4. Par téléscopage, on trouve

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p} (a-m)^{-(k+1)}\left[\mathrm{Q}' + (m-a)\mathrm{Q}\right]^{(k)} &= \sum_{k=0}^{p}\left[(a-m)^{-(k+1)}\mathrm{Q}^{(k+1)} - (a-m)^{k}\mathrm{Q}^{(k)}\right] \\ &= (a-m)^{-(p+1)}\underbrace{\mathrm{Q}^{(p+1)}}_{=0} - \mathrm{Q}\end{aligned}$$

Et d'après le calcul réalisé à la question 2, on sait que $\mathrm{Q}' + (m-a)\mathrm{Q} = \mathrm{P}$ d'où

$$\boxed{\sum_{k=0}^{p} (a-m)^{-(k+1)}\left[\mathrm{Q}' + (m-a)\mathrm{Q}\right]^{(k)} = -\mathrm{Q} = \sum_{k=0}^{p} (a-m)^{-(k+1)}\mathrm{P}^{(k)}}$$

5. On a
$$x(0) = \lambda + \mathrm{Q}(0)$$

D'où
$$\boxed{\lambda = x(0) + \sum_{k=0}^{p} (a-m)^{-(k+1)}\mathrm{P}^{(k)}(0)}$$

6. Si $\lambda \neq 0$, on a

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad x(t) = \lambda \mathrm{e}^{at}\left[1 + \lambda^{-1}\mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{(m-a)t}\right]$$

et par croissances comparées, comme $\text{Re}\,(m-a) < 0$

$$\left|\mathrm{e}^{(m-a)t}\right| = \mathrm{e}^{\text{Re}\,(m-a)t} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{(m-a)t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

D'où $\boxed{\text{Si } \lambda \neq 0 \quad x(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \lambda\mathrm{e}^{at} \quad \text{ et si } \lambda = 0 \quad x(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{m-a} t^p \mathrm{e}^{mt}}$

Exercice 3 (****)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée et $a > 0$. Montrer que l'équation

$$y'' - a^2 y = f \tag{L}$$

admet une unique solution bornée sur $\mathbb{R}$.

Corrigé : Soit (H) l'équation homogène associée. On a

$$\mathrm{S_H} = \text{Vect}\,(t \mapsto \mathrm{e}^{at}, t \mapsto \mathrm{e}^{-at})$$

On procède ensuite par variation de la constante. Soient $\lambda, \mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables avec $y : t \mapsto \lambda(t)\mathrm{e}^{at} + \mu(t)\mathrm{e}^{-at}$ et telles que pour tout t réel

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{at} & \mathrm{e}^{-at} \\ a\mathrm{e}^{at} & -a\mathrm{e}^{-at} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'(t) \\ \mu'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \lambda'(t) \\ \mu'(t) \end{pmatrix} = -\frac{1}{2a} \begin{pmatrix} -a\mathrm{e}^{-at} & -\mathrm{e}^{-at} \\ -a\mathrm{e}^{at} & \mathrm{e}^{at} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

Ainsi, il existe α, β réels tels que

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y(t) = \left(\alpha + \frac{1}{2a}\int_0^t \mathrm{e}^{-as} f(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{e}^{at} + \left(\beta - \frac{1}{2a}\int_0^t \mathrm{e}^{as} f(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{e}^{-at}$$

Comme $f \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}(1)$, il vient par intégration des relations de comparaison

$$\int_0^t \mathrm{e}^{as} f(s)\,\mathrm{d}s \underset{t\to+\infty}{=} \int_0^t \mathrm{O}(\mathrm{e}^{as})\,\mathrm{d}s \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\int_0^t \mathrm{e}^{as}\,\mathrm{d}s\right) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}(\mathrm{e}^{at})$$

d'où

$$\left(\beta - \frac{1}{2a}\int_0^t \mathrm{e}^{as} f(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{e}^{-at} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}(1)$$

On a $\mathrm{e}^{-as} f(s) = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{s^2}\right)$ d'où la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-as} f(s)\,\mathrm{d}s$ et par conséquent, la seule possibilité pour que y admette une limite finie pour $t \to +\infty$ est d'avoir

$$\alpha = -\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-as} f(s)\,\mathrm{d}s$$

On procède exactement de la même manière pour $t \to -\infty$ et on trouve

$$\beta = -\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{as} f(s)\,\mathrm{d}s$$

En injectant les écritures intégrales de α et β dans celle de y, on obtient

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \qquad y(t) = -\frac{\mathrm{e}^{at}}{2a}\int_t^{+\infty} \mathrm{e}^{-as} f(s)\,\mathrm{d}s - \frac{\mathrm{e}^{-at}}{2a}\int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{as} f(s)\,\mathrm{d}s}$$

Exercice 4 (**)

Soit $\lambda > 0$ et y solution de $y'' + \left(1 + \dfrac{\lambda}{t^2}\right) y = 0$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$. Montrer

$$\forall a \in \mathbb{R} \qquad \exists \alpha \in \,]\,a\,;a+\pi\,[\quad | \quad y(\alpha) = 0$$

Corrigé : On pose $\quad z = y'\varphi - y\varphi' \quad$ avec $\quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi(t) = \sin(t-a)$

On a
$$\forall t > 0 \qquad z'(t) = -\frac{\lambda}{t^2}\varphi(t)y(t)$$

Si y ne s'annule pas sur $]\,a\,;a+\pi\,[$, alors z est strictement monotone sur $[\,a\,;a+\pi\,]$, strictement croissante si $y < 0$ et strictement décroissante si $y > 0$. Or, on a

$$z(a+\pi) - z(a) = y(a+\pi) + y(a)$$

qui est en contradiction avec les monotonies précédemment annoncées. On conclut

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R} \qquad \exists \alpha \in \,]\,a\,;a+\pi\,[\quad | \quad y(\alpha) = 0}$$

Exercice 5 (****)

Soit $f \in \mathscr{C}([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$ et $u \in \mathscr{C}^2([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$ solution non nulle de l'équation différentielle

$$y'' + f(t)y = 0 \tag{H}$$

vérifiant $u(a) = u(b) = 0$. Montrer l'inégalité

$$\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{4}{b-a}$$

Corrigé : On a montré dans un autre exercice que les zéros de u sont en nombre fini sur le segment $[\,a\,;b\,]$. On suppose que a et b sont deux zéros consécutifs de u (le résultat sera vrai *a fortiori* pour tout couple de zéros de u). La fonction u ne s'annule donc pas sur $]\,a\,;b\,[$. La fonction $|u|$ étant continue sur le segment $[\,a\,;b\,]$, elle atteint son maximum et ailleurs qu'en les bornes, *i.e.* il existe $c \in \,]\,a\,;b\,[$ tel que $|u(c)| = \underset{t\in[\,a\,;b\,]}{\mathrm{Max}}\,|u(t)|$. On a

$$\int_a^b |f(t)u(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant |u(c)| \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

et comme $u'' = -fu$, il vient pour tout $]\,\alpha\,;\beta\,[\, \subset [\,a\,;b\,]$

$$\int_a^b |f(t)u(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b |u''(t)|\,\mathrm{d}t \geqslant \int_\alpha^\beta |u''(t)|\,\mathrm{d}t \geqslant \left|\int_\alpha^\beta u''(t)\,\mathrm{d}t\right| = |u'(\beta) - u'(\alpha)|$$

d'où
$$\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{|u'(\beta) - u'(\alpha)|}{|u(c)|}$$

Or, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $\alpha \in \,]\,a\,;c\,[$ et $\beta \in \,]\,c\,;b\,[$ tels que

$$\frac{u(c) - u(a)}{c-a} = u'(\alpha) \quad \text{et} \quad \frac{u(b) - u(c)}{b-c} = u'(\beta)$$

Avec $u(a) = u(b) = 0$, il vient

$$\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \geqslant \left|\frac{-1}{b-c} - \frac{1}{c-a}\right| = \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}$$

Une étude de fonction de $\varphi : x \mapsto \dfrac{1}{b-x} + \dfrac{1}{x-a}$ donne

$$\operatorname*{Inf}_{x\in]\,a\,;b\,[} \varphi(x) = \varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{4}{b-a}$$

On conclut
$$\boxed{\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{4}{b-a}}$$

Remarque : Il s'agit de *l'inégalité de Liapounov.*

Exercice 6 (**)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telle que
$$f''(t) + f'(t) + f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Montrer
$$f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Corrigé : On a vu dans l'exercice 1 de la feuille 68 que pour $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re}\alpha > 0$, toute fonction g telle que $g'(x) + \alpha g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ vérifie $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Soient α et β des complexes et $g = f' + \alpha f$. Cherchons β tel que
$$g' + \beta g = f'' + f' + f$$

On a
$$g' + \beta g = f'' + f' + f \iff f'' + (\alpha+\beta)f' + \alpha\beta f$$

Si $\alpha + \beta = \alpha\beta = 1$, c'est-à-dire α, β racines de $\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 1$, alors on a l'égalité souhaitée. On prend $\alpha = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}$ et $\beta = \bar{\alpha}$. Alors, d'après le résultat préliminaire, comme $\operatorname{Re}\beta > 0$ et $g'(x) + \beta g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, on obtient $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ c'est-à-dire $f(x) + \alpha f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et comme $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, on conclut
$$\boxed{f(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0}$$

Remarque : On peut aussi poser $g = f''+f'+f$ puis considérer cette égalité comme une équation différentielle en f que l'on résout par variation des constantes et enfin utiliser le comportement asymptotique de g. Cette démarche fonctionne mais s'avère beaucoup plus lourde que celle proposée ci-avant. On trouve
$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f(t) = \mathrm{e}^{-t/2}\left[\alpha\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + \beta\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right] + \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)/2}h(s)\,\mathrm{d}s$$

avec
$$\forall s \in \mathbb{R} \qquad h(s) = \left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}s}{2}\right) - \sin\left(\frac{\sqrt{3}s}{2}\right)\right] g(s)$$

et α, β des réels. Pour conclure sur le comportement asymptotique de l'intégrale dans l'écriture de f, on peut quantifier $h(s) = \mathrm{o}(1)$ et découper l'intégrale de manière appropriée ou aussi procéder par convergence dominée après changement de variables avec
$$\int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)/2}h(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t \mathrm{e}^{-u/2}h(t-u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u/2}h(t-u)\mathbb{1}_{[\,0\,;t\,]}(u)\,\mathrm{d}u$$

en observant
$$\mathrm{e}^{-u/2}h(t-u)\mathbb{1}_{[\,0\,;t\,]}(u) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \left|\mathrm{e}^{-u/2}h(t-u)\mathbb{1}_{[\,0\,;t\,]}(u)\right| \leqslant \|h\|_\infty \mathrm{e}^{-u/2}$$

Exercice 7 (****)

Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution non nulle de $y'' + \mathrm{e}^t y = 0$.

1. Montrer que l'ensemble des zéros de y est dénombrable.
2. On note a_n le n-ième zéro positif de y. En considérant $\varphi : t \mapsto \sin\left(\mathrm{e}^{\frac{a_n}{2}}(t - a_n)\right)$ et $\psi : t \mapsto \sin\left(\mathrm{e}^{\frac{a_{n+1}}{2}}(t - a_n)\right)$, montrer
$$\pi \mathrm{e}^{-\frac{a_{n+1}}{2}} \leqslant a_{n+1} - a_n \leqslant \pi \mathrm{e}^{-\frac{a_n}{2}}$$
3. Déterminer un équivalent simple de a_n pour $n \to +\infty$.

Corrigé : 1. On a montré dans un autre exercice que les zéros de y sont en nombre fini sur tout segment. L'union des zéros de y est l'union pour $k \in \mathbb{Z}$ de l'union des zéros de y sur $[\,k\,;k+1\,]$, autrement dit c'est une union dénombrable d'ensembles finis donc c'est un ensemble au plus dénombrable. Montrons qu'il n'est pas fini. Supposons par exemple qu'il existe a réel tel que $y(t) > 0$ pour tout $t \geqslant a$. On a $y''(t) = -\mathrm{e}^t y(t) < 0$ pour tout $t \geqslant a$ d'où la concavité de y sur $[\,a\,;+\infty\,[$. Supposons qu'il existe $\alpha \geqslant a$ tel que $y'(\alpha) < 0$. Par concavité, le graphe de y est situé sous ses tangentes d'où

$$\forall t \geqslant a \qquad y(t) \leqslant y'(\alpha)(t - \alpha) + y(\alpha)$$

Puis
$$y'(\alpha)(t-\alpha) + y(\alpha) \xrightarrow[t \to +\infty]{} -\infty \quad \Longrightarrow \quad y(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} -\infty$$

ce qui contredit le signe de y. On en déduit que $y' \geqslant 0$ d'où y croît et en particulier $y(t) \geqslant y(a) > 0$ pour tout $t \geqslant a$. Par conséquent

$$\forall t \geqslant a \qquad y''(t) = -\mathrm{e}^t y(t) \leqslant -\mathrm{e}^t y(a) \quad \Longrightarrow \quad y''(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} -\infty$$

Avec le théorème des accroissements finis ou un écriture intégrale, on en déduit

$$y'(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} -\infty \quad \text{puis} \quad y(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} -\infty$$

ce qui contredit le signe de y. On conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble des zéros de } y \text{ est dénombrable.}}$$

2. Supposons que y ne s'annule pas sur $\left]\, a_n\,; a_n + \pi \mathrm{e}^{-\frac{a_n}{2}}\,\right]$. On pose

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{W}(t) = \begin{vmatrix} y(t) & \varphi(t) \\ y'(t) & \varphi'(t) \end{vmatrix} = y(t)\varphi'(t) - y'(t)\varphi(t)$$

La fonction W est dérivable et on a

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{W}'(t) = y(t)\varphi''(t) - y''(t)\varphi(t) = y(t)\varphi(t)(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{a_n})$$

Ainsi, la fonction W′ est de signe constant sur $\left]\, a_n\,; a_n + \pi \mathrm{e}^{-\frac{a_n}{2}}\,\right]$ égal au signe de y sur cet intervalle. Or, on a

$$\mathrm{W}(a_n) = \underbrace{y(a_n)}_{=0}\varphi'(a_n) - y'(a_n)\underbrace{\varphi(a_n)}_{=0} = 0$$

et
$$\mathrm{W}(a_n + \pi \mathrm{e}^{-\frac{a_n}{2}}) = y(a_n + \pi \mathrm{e}^{-\frac{a_n}{2}})\varphi'(a_n + \pi \mathrm{e}^{-\frac{a_n}{2}}) = -\mathrm{e}^{\frac{a_n}{2}} y(a_n + \pi \mathrm{e}^{-\frac{a_n}{2}})$$

Le signe de $\mathrm{W}(a_n + \pi \mathrm{e}^{-\frac{a_n}{2}})$ contredit alors la monotonie de W. On en déduit que y s'annule sur $\left]\, a_n\,; a_n + \pi \mathrm{e}^{-\frac{a_n}{2}}\,\right]$ d'où $a_{n+1} \in \left]\, a_n\,; a_n + \pi \mathrm{e}^{-\frac{a_n}{2}}\,\right]$ et par suite

$$a_{n+1} - a_n \leqslant \pi \mathrm{e}^{-\frac{a_n}{2}}$$

De la même manière, on démontre l'autre inégalité et on conclut

$$\boxed{\pi \mathrm{e}^{-\frac{a_{n+1}}{2}} \leqslant a_{n+1} - a_n \leqslant \pi \mathrm{e}^{-\frac{a_n}{2}}}$$

3. La suite $(a_n)_n$ est croissante non majorée sinon, elle aurait une limite finie et un segment contiendrait une infinité de zéros de y. Ainsi, on a $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et il s'ensuit $a_{n+1} - a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et par conséquent $\mathrm{e}^{-\frac{a_{n+1}}{2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-\frac{a_n}{2}}$. On a donc

$$a_{n+1} - a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \pi \mathrm{e}^{-\frac{a_n}{2}}$$

On pose $u_n = \mathrm{e}^{\frac{a_n}{2}}$ pour n entier. On a

$$2\left(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{u_n}$$

Or $\qquad \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n} \quad$ puisque $\quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

On obtient donc
$$u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi}{2}$$

Par sommation des relations de comparaison, on en déduit

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n-1} [u_{k+1} - u_k] \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n\pi}{2}$$

On conclut
$$\boxed{a_n = 2\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\ln(n)}$$