ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°67

Exercice 1 (*)

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x+y) = f(x)f(y)$$

Exercice 2 (**)

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f''(x) + f(-x) = x$$

On pourra considérer la partie paire et impaire de ces fonctions.

Exercice 3 (**)

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \cos(x) - \int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 4 (**)

Résoudre sur $\mathrm{I} = \,]\,0\,;+\infty\,[$ l'équation différentielle

$$x' + \frac{2}{t}x = \frac{1}{\sqrt{x}} \tag{E}$$

Exercice 5 (**)

Chercher les solutions développables en série entière puis résoudre complètement les équations différentielles linéaires suivantes :

1. $(t^2+t)x''+(3t+1)x'+x = 0$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$
2. $tx'' + 3x' - 4t^3x = 0$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$

Exercice 6 (**)

On pose $\qquad \forall t \in \mathbb{R} \qquad f(t) = \sin\left[\ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right)\right]$

1. Montrer que f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2
$$(1+t^2)x'' + tx' + x = 0$$
2. En déduire que f est développable en série entière en zéro et préciser son développement.

Exercice 7 (*)

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle linéaire

$$y'' - 2y' + y = \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^2} \tag{L}$$

Exercice 8 (*)

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle linéaire

$$(t^2+1)^2x''+2t(t^2+1)x'+x=\mathrm{e}^{\operatorname{Arctan}(t)} \tag{L}$$

avec le changement de variable $t=\tan(u)$.

Exercice 9 (*)

Résoudre sur $]\,0\,;\pi\,[$ l'équation différentielle linéaire

$$y''+y=\frac{1}{\sin(t)} \tag{L}$$

Exercice 10 (**)

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $\quad f''+f\geqslant 0$. Montrer

$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad f(x)+f(x+\pi)\geqslant 0$$

Exercice 11 (**)

Soit y solution de $y''+a(t)y=0$ avec $a\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R},]\,0\,;+\infty\,[)$. Montrer que y s'annule au moins une fois.

Exercice 12 (**)

On considère l'équation différentielle

$$y''+q(t)y=0 \tag{H}$$

où q est une fonction continue intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

1. Soit y une solution bornée de (H). Étudier le comportement de y' en $+\infty$.
2. Montrer que (H) admet des solutions non bornées.

Exercice 13 (**)

Soit $p\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et x solution non nulle de l'équation différentielle

$$x''-p(t)x=0$$

On note $\mathcal{I}=\{t\in[\,0\,;1\,]\mid x(t)=0\}$. Montrer que $\mathcal{I}$ est fini.