ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°69

Exercice 1 (**)

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) + f(-x) = \mathrm{e}^x \tag{E}$$

Indications : Montrer que f est deux fois dérivable puis établir que f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2.

Exercice 2 (***)

Soit $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(a, m) \in \mathbb{K}^2$ avec $a \neq m$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] \setminus \{0\}$ avec $p = \deg \mathrm{P}$. On considère l'équation différentielle

$$x' = ax + \mathrm{P}(t)\mathrm{e}^{mt} \tag{L}$$

1. Soit
$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{K}_p[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathbb{K}_p[\mathrm{X}] \\ \quad \mathrm{Q} \quad \longmapsto \mathrm{Q}' + (m-a)\mathrm{Q} \end{cases}$$
Comparer $\deg \mathrm{Q}$ avec $\deg \Phi(\mathrm{Q})$ pour $\mathrm{Q} \in \mathbb{K}_p[\mathrm{X}]$ et montrer que $\Phi \in \mathrm{GL}(\mathbb{K}_p[\mathrm{X}])$.
2. En déduire que l'équation (L) admet une solution particulière x_0 de la forme $x_0(t) = \mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{mt}$ pour t réel avec $\mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $\deg \mathrm{Q} = \deg \mathrm{P}$.

   Dans ce qui suit, on note $x(t) = \lambda \mathrm{e}^{at} + \mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{mt}$ une solution de (L) et α le coefficient dominant de P.
3. Si $\mathrm{Re}\,(m) > \mathrm{Re}\,(a)$, déterminer un équivalent simple de $x(t)$ pour $t \to +\infty$.
4. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} (a-m)^{-(k+1)} \left[\mathrm{Q}' + (m-a)\mathrm{Q}\right]^{(k)}$.
5. En déduire une expression de λ en fonction de $x(0)$ et P.
6. Si $\mathrm{Re}\,(m) < \mathrm{Re}\,(a)$, déterminer un équivalent simple de $x(t)$ pour $t \to +\infty$.

Indications : 1. Déterminer Ker Φ.
2. Considérer $x_0(t) = \mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{mt}$ pour t réel et injecter x_0 dans (L).
3. Utiliser la relation entre Q et P obtenue à la question précédente pour déterminer une relation sur les coefficients dominants et calculer $\left|\mathrm{e}^{(a-m)t}\right|$ pour t réel.
4. Observer un téléscopage.
6. Distinguer $\lambda \neq 0$ et $\lambda = 0$ et calculer $\left|\mathrm{e}^{(m-a)t}\right|$ pour t réel.

Exercice 3 (****)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée et $a > 0$. Montrer que l'équation

$$y'' - a^2 y = f \tag{L}$$

admet une unique solution bornée sur $\mathbb{R}$.

Indications : Procéder par variation de la constante. Utiliser l'intégration des relations de comparaison en $+\infty$ et $-\infty$ pour déterminer les constantes garantissant le caractère borné de la fonction.

Exercice 4 (**)

Soit $\lambda > 0$ et y solution de $y'' + \left(1 + \dfrac{\lambda}{t^2}\right) y = 0$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$. Montrer

$$\forall a \in \mathbb{R} \qquad \exists \alpha \in \,]\,a\,;a+\pi\,[\quad | \quad y(\alpha) = 0$$

Indications : Poser $z = y'\varphi - y\varphi'$ où $\varphi(t) = \sin(t-a)$.

Exercice 5 (****)

Soit $f \in \mathscr{C}([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$ et $u \in \mathscr{C}^2([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$ solution non nulle de l'équation différentielle

$$y'' + f(t)y = 0 \tag{H}$$

vérifiant $u(a) = u(b) = 0$. Montrer l'inégalité

$$\int_a^b |f(t)| \,\mathrm{d}t \geqslant \frac{4}{b-a}$$

Indications : Rappeler que les zéros de u sont en nombre fini sur le segment $[\,a\,;b\,]$ puis montrer qu'on peut supposer que a et b sont zéros consécutifs. Justifier qu'il existe $c \in \,]\,a\,;b\,[$ tel que $|u(c)| = \underset{t\in[\,a\,;b\,]}{\mathrm{Max}} |u(t)|$ puis minorer $\displaystyle\int_a^b |f(t)u(t)| \,\mathrm{d}t$ sur tout intervalle $]\,\alpha\,;\beta\,[\subset [\,a\,;b\,]$. Invoquer ensuite le théorème des accroissement finis sur $]\,a\,;c\,[$ et $]\,c\,;b\,[$ et conclure avec une étude de fonction bien choisie.

Exercice 6 (**)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telle que

$$f''(t) + f'(t) + f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Montrer
$$f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Indications : Déterminer des complexes α et β tels que $g = f' + \alpha f$ et $g' + \beta g = f'' + f' + f$ puis utiliser le résultat de l'exercice 1 feuille 68.

Exercice 7 (****)

Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution non nulle de $y'' + \mathrm{e}^t y = 0$.

1. Montrer que l'ensemble des zéros de y est dénombrable.
2. On note a_n le n-ième zéro positif de y. En considérant $\varphi : t \mapsto \sin\left(\mathrm{e}^{\frac{a_n}{2}}(t-a_n)\right)$ et $\psi : t \mapsto \sin\left(\mathrm{e}^{\frac{a_{n+1}}{2}}(t-a_n)\right)$, montrer
$$\pi \mathrm{e}^{-\frac{a_{n+1}}{2}} \leqslant a_{n+1} - a_n \leqslant \pi \mathrm{e}^{-\frac{a_n}{2}}$$
3. Déterminer un équivalent simple de a_n pour $n \to +\infty$.

Indications : 1. Montrer que l'ensemble des zéros est au plus dénombrable puis montrer qu'il est infini par l'absurde, en utilisant un argument de concavité et en déterminant le signe de y' sur un intervalle à choisir.
2. Supposer que y ne s'annule pas sur $\left]\, a_n\,; a_n + \pi \mathrm{e}^{-\frac{a_n}{2}} \,\right]$ puis considérer $y\varphi' - y'\varphi$.
3. Justifier que $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ puis déterminer un équivalent de $a_{n+1} - a_n$ et poser ensuite $u_n = \mathrm{e}^{\frac{a_n}{2}}$.
Conclure à l'aide de sommation de relations de comparaison.